



LUDWIG-  
MAXIMILIANS-  
UNIVERSITÄT  
MÜNCHEN

# Studienabschlussarbeiten

Fakultät für Physik

Ligon, Thomas:

Das Keplerproblem differentialgeometrisch gesehen

**Diplomarbeit, Sommersemester 1973**

Gutachter: Schaaf, Manfred

Fakultät für Physik  
Theoretische Abteilung

Ludwig-Maximilians-Universität München

<https://doi.org/10.5282/ubm/epub.21922>

# Das Keplerproblem differentialgeometrisch gesehen

von Thomas S. Ligon

## Abstract:

This paper examines the Kepler 2-body problem as an example of the symplectic differential geometric formulation of Hamiltonian mechanics. First, the foundations of symplectic differential geometry and the conventional analysis of the Kepler problem are presented. Then, the  $SO(4)$  and  $SO(3,1)$  symmetry of the problem and the conserved angular momentum and Runge-Lenz vectors are discussed. The symmetry is also discussed globally, and the integral curves of the Runge-Lenz vector are found.

Sektion Physik der Universität München, Theoretische  
Abteilung, Lehrstuhl Prof. Dr. Fritz Bopp

Juni 1973

Inhalt:

	Zusammenfassung	i
	Symbolik	iii
	Einleitung	iv
I.	Differentialgeometrie	1
II.	Symplektische Differentialgeometrie	8
III.	Zur Bedeutung der symplektischen Form	12
IV.	Reduktion auf eine kleinere Dimension	15
V.	Keplerproblem und erste Reduktion	17
VI.	Stufenweise Reduktion	20
VII.	Berechnung der Bahnen von $H$ durch einmalige Reduktion	25
VIII.	Diskussion der Symmetrie und der Bahnen von $\vec{M}$	29
IX.	Stereographische Projektion und globale $SO(4)$ bzw. $SO(3,1)$ Symmetrie	35
X.	Schlußbemerkungen	42
	Literatur	44

Symbolik:

Symbole ohne Erklärung im Text:

■	Ende eines Beweises
[1; (7.12.)]	Satz bzw. Def. (7.12.) in Literaturzitat 1
$\otimes$	Tensorprodukt
$\vec{A}$	Vektor, n-tupel $(A_1, \dots, A_n)$
$\vec{A} \cdot \vec{B}$	$:= \sum_{i=1}^n A_i B_i$
$ \vec{A} $	$:= (\vec{A} \cdot \vec{A})^{1/2}$
$\vec{A} \times \vec{B}$	$(\vec{A} \times \vec{B})_i := A_j B_k - A_k B_j; (i, j, k) = \text{zykl. Perm. von } (1, 2, 3)$

Symbole mit Erklärung im Text:

$D(M)$	Gruppe der Diffeomorphismen von M	(I.4.)
$T_m(M)$	Tangentenraum von M in m	(I.6.)
$T(M)$	Tangentialbündel von M	(I.6.)
$\tau_M: TM \rightarrow M$	Tangentialbündelprojektion	(I.6.)
$Tf: TM \rightarrow TN$	Tangentialabbildung von f	(I.7.)
$T^r(M)$	Vektorbündel der Tensoren	(I.9.)
$\mathcal{T}_s^r(M)$	Tensorfelder	(I.10.)
$\mathcal{F}(M)$	Algebra der Funktionen	(I.10.)
$\mathcal{X}(M)$	Vektorfelder	(I.10.)
$\mathcal{X}^*(M)$	Kovektorfelder	(I.10.)
$\varphi^*$	induzierte Abbildung	(I.11.)
$c'(\lambda)$	Tangent einer Kurve	(I.13.)
$F_X$	Fluß von X	(I.16.)
$df$	Differential von f	(I.17.)
$L_X f$	Liesche Ableitung	(I.17.)
$[X, Y]$	Lie-Klammer von Vektorfeldern	(I.24.)
$\Omega^k(E)$	äußere k-Formen auf einem Vektorraum	(I.28.)
$\wedge$	alternierende Abbildung	(I.29.)
$\wedge$	äußeres Produkt	(I.31.)
$\Omega^k(M)$	äußere Differentialformen	(I.34.)
$d$	äußere Ableitung	(I.35.)
$i_X$	inneres Produkt	(I.36.)
$b, \#$	Vektorbündel-Isomorphismen	(II.1.)
$-\theta_0, \omega_0$	kanonische Formen auf $T^*V$	(II.5.)
$X_f = (df)^\#$	Vektorfeld	(II.7.)
$\{f, g\}$	Poisson-Klammer	(II.7.)
$\mathcal{L}_G$	Linksinvariante Vektorfelder von G	(II.17.)
$\mathfrak{l}_G$	Lie-Algebra von G	(II.17.)
$\exp(tX)$	Exponentialabbildung	(II.19.)

## Einleitung

Eine physikalische Theorie hat drei Aspekte: 1) einen physikalischen Geltungsbereich, 2) ein mathematisches Modell und 3) eine Interpretation. Hier betrachten wir als Geltungsbereich die nichtrelativistische Bewegung materieller Körper, die zu Massenpunkten idealisiert werden. Als mathematisches Modell wählen wir Hamiltonsche dynamische Systeme auf symplektischen Mannigfaltigkeiten (Definition: (II.25.)). Die (parametrisierten) Integralkurven eines Hamiltonschen Vektorfeldes werden dann interpretiert als Bewegungsbahnen der Massenpunkte. In den üblichen Lehrbüchern der Mechanik wird der Name "symplektische Mannigfaltigkeit" nicht ausgesprochen, aber viele seiner wesentlichen Züge stehen schon da. Somit steht der klassischen Mechanik eine verhältnismäßig reife mathematische Theorie zur Verfügung, deren Fähigkeiten diejenigen der üblichen Formulierung überschreiten.

In den letzten Jahrzehnten, hat die symplektische Differentialgeometrie Interesse bei manchen Mathematikern erweckt, wie bei Abraham [1] nachzulesen ist. Unter anderem werden globale und qualitative Eigenschaften von dynamischen Systemen untersucht.

Aber auch unter Physikern ist diese abstrakte mathematische Theorie von Interesse, und zwar im Zusammenhang mit der Quantenmechanik. Unter Quantisierung verstehen wir den Übergang von der klassisch mechanischen Beschreibung eines Problems zur quantenmechanischen Beschreibung. Das läßt sich mathematisch so ausdrücken: Quantisierung ist ein gewisser Funktor von der Kategorie der symplektischen Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der komplexen Hilberträume. Für die Punktmechanik gibt es Ansätze einer solchen Konstruktion (siehe z.B. Kostant [9]), die aber noch nicht bis zum Vergleich mit dem Experiment bzw. mit den konventionellen Methoden der Quantenmechanik gelangt ist. Ein noch weiter gestecktes Ziel wäre, den Sachverhalt auf unendlich dimensionale symplektische Mannigfaltigkeiten, und damit auf Kontinuumsmechanik und Quantenfeldtheorie auszudehnen (siehe Segal [14]). Dann bestünde die Hoffnung, eine mathematisch strenge Formulierung der Quantenfeldtheorie zu erhalten. So wäre es vielleicht möglich, manche von den heutigen Problemen

der Quantenfeldtheorie zu lösen.

Das Quantisierungsverfahren wird auch von Mathematikern erforscht, da es Aussagen über mögliche unitäre Darstellung von Lie-Gruppen liefert [9].

Da die symplektische Differentialgeometrie, die für den Physiker von Belang ist, eine nicht allgemein bekannte, abstrakte mathematische Theorie ist, schien es ratsam ein nichttriviales, konkretes Beispiel auszurechnen. So wurde die vorliegende Arbeit motiviert, in der das Keplersche 2-Körper Problem in symplektisch differentialgeometrischer Sprache dargestellt wird. Deshalb enthält diese Arbeit besonders viele Beispiele, auch solche, die nicht nötig oder üblich sind.

Ein Grund für das Interesse an dem Kepler-Problem in den letzten Jahren ist die Untersuchung von "Nicht-Symmetrie" Gruppen. Das ist eine Gruppe, die die Symmetrie-Gruppe des Problems als Untergruppe hat, und die noch weitere Gruppenelemente besitzt, die H nicht invariant lassen. Somit hat man eine Situation, die der Hadronenphysik ähnlich ist: eine "gebrochene" Symmetrie. Man hat versucht, diesen Sachverhalt am Beispiel eines bekannten Problems (das Kepler-Problem) besser zu verstehen. Somit will man die Dynamik durch Gruppentheorie beschreiben. Ein Problem liegt darin, daß es im allgemeinen möglich ist, unendlich viele Gruppen anzugeben, die die Symmetrie brechen. Nicht-Symmetrie Gruppen wurden, quantenmechanisch, von Bacry [2] und Bander und Itzykson [3] diskutiert, und klassisch mechanisch von Györgyi [6]. (Györgyi gibt auch ein ausführliches Literaturverzeichnis an.)

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst die mathematische Grundlage nach Abraham [1] dargestellt. Es folgt eine Diskussion über die Rolle, die eine symplektische Form in der Mechanik spielt. Nachdem die Frage der Reduktion auf eine kleinere Dimension angesprochen wird, wird dann das Kepler-Problem formuliert. Die übliche Analyse des Problems (Impuls- und Drehimpuls Erhaltung, Relativkoordinaten) wird auch zum größten Teil nach Abraham [1] durchgeführt.

Das Kepler-Problem besitzt eine sehr starke Symmetrie, die in letzter Zeit in Analogie zur Hadronenphysik diskutiert wurde [6]. Diese Symmetrie erlaubt es, die Bewegungs-

bahnen zu finden ohne eine Differentialgleichung lösen zu müssen (Kapitel VII.). Durch die Poisson-Klammer ist es leicht, eine Darstellung einer Lie-Algebra für diese Symmetrie zu finden. Aber damit ist noch nicht gesagt, daß eine globale Wirkung einer Gruppe existiert, die mit dieser Darstellung einer Lie-Algebra zusammenhängt. Die Antwort auf diese Frage läuft darauf hinaus, die Integralkurven der jeweiligen Vektorfelder zu finden. In Kapitel VIII. wird dieses Problem auf eine einzige Differentialgleichung reduziert und die Existenz der Integralkurven bewiesen. Für Energie ungleich Null werden in Kapitel IX. die Integralkurven auch angegeben. Soweit mir bekannt ist, ist das etwas Neues.

Bekanntlich folgt Drehimpuls-Erhaltung aus der Rotationssymmetrie. Aus der Symmetrie unter welcher Transformation folgt dann die Erhaltung des Runge-Lenz Vektors (Aphels)? Diese Frage wird auch durch die Angabe der Integralkurven in Kapitel IX. beantwortet, obwohl die Transformation nicht so überschaubar ist wie eine Rotation.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Manfred Schaaf für die Anregung zu dieser Arbeit danken, sowie für viele nützliche Diskussionen.

## I. Differentialgeometrie

In diesem Kapitel werden einige der wichtigsten Begriffe und Sätze der modernen Differentialgeometrie in Anlehnung an Abraham [1] zusammengestellt, insbesondere: Mannigfaltigkeit, Tangentialbündel, Vektorfeld, Integralkurve, Liesche Ableitung und äußere Ableitung. Vor allem soll es dazu dienen, den für das Folgende notwendigen Stoff abzugrenzen und eine Bezeichnungsweise festzulegen. Es werden keine Beweise angegeben. Der Aufbau ist auch sonst sehr lückenhaft, z.B. beweisen wir nicht, daß das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit auch wieder eine Mannigfaltigkeit ist. Als Lehrbuch erwähnen wir Abraham [1] und Dieudonné [4].

Es sei noch darauf hingewiesen, daß alle Begriffe in diesem Kapitel schon allein auf Grund der differenzierbaren Struktur definiert werden können. Eine spezielle Struktur begegnen wir erst im nächsten Kapitel.

(I.1.) Definition [1;(3.1.)] (i) Sei  $S$  eine Menge. Eine lokale Karte ist eine Bijektion  $\varphi$  zwischen einer Untermenge  $U$  von  $S$  und einem offenen Unterraum eines  $\mathbb{R}^n$ , wobei  $n$  von  $\varphi$  abhängen kann. Ein Atlas auf  $S$  ist eine Familie  $A$  von lokalen Karten  $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$  derart, daß

1)  $S = \bigcup \{U_i : i \in I\}$

2) Für je zwei  $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$  mit  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  gilt:  $\varphi(U_i \cap U_j)$  ist offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $\varphi_{ji} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}$  sowie  $\varphi_{ji}^{-1}$  sind bijektiv und  $C^\infty$  (d.h. beliebig oft differenzierbar).

(ii) Zwei Atlanten  $A_1$  und  $A_2$  sind genau dann äquivalent wenn  $A_1 \cap A_2$  ein Atlas ist. Eine differenzierbare Struktur  $\mathcal{S}$  auf  $S$  ist eine Äquivalenzklasse von Atlanten auf  $S$ .  $A_{\mathcal{S}} := \bigcup \{A : A \in \mathcal{S}\}$  ist der maximale Atlas von  $\mathcal{S}$ , und eine Karte  $(U, \varphi) \in A_{\mathcal{S}}$  heißt zulässige lokale Karte.

(iii) Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist ein Paar  $(S, \mathcal{S})$  wobei  $S$  eine Menge ist und  $\mathcal{S}$  eine differenzierbare Struktur auf  $S$  ist.

(I.2.) Definition [1;(3.2.)] Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Untermenge  $A \subset M$  ist genau dann offen, wenn es für jedes  $a \in A$  eine zulässige lokale Karte  $(U, \varphi)$  gibt mit  $a \in U$  und  $U \subset A$ .

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit heißt n-Mannig-



faltigkeit wenn es zu jedem  $a \in A$  eine zulässige lokale Karte  $(U, \varphi)$  gibt mit  $a \in U$  und  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ . (Die Dimension ist konstant.)

Eine Mannigfaltigkeit bedeutet in dieser Arbeit eine Hausdorffsche differenzierbare  $n$ -Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Basis der Topologie.

Bemerkung Die Definitionen von Mannigfaltigkeiten sind nicht ganz einheitlich. Oft fordert man, daß  $S$  ein topologischer Raum und die Karten Homöomorphismen seien. Hier wird die Topologie erst von den Karten induziert, aber mit dem gleichen Resultat. Was hier maximaler Atlas oder differenzierbare Struktur heißt wird oft Atlas genannt.

(I.3.) Definition [1;(3.5.)] Eine Untermannigfaltigkeit einer Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Untermenge  $B \subset M$  derart, daß es für jedes  $b \in B$  eine zulässige lokale Karte gibt mit der Untermannigfaltigkeit-Eigenschaft:  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$  und  $\varphi(U \cap B) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ .

(I.4.) Definition [1;(3.8.)] Eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$  wobei  $M$  und  $N$  Mannigfaltigkeiten sind heißt Diffeomorphismus wenn  $f$  bijektiv ist und  $f$  und  $f^{-1}$   $C^\infty$  sind. Mit  $D(M)$  bezeichnen wir die Gruppe der Diffeomorphismen von  $M$ .

Bemerkung Ein Diffeomorphismus ist ein Isomorphismus in der Kategorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

(I.5.) Definition [1;(5.1.)] Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $m \in M$ . Eine Kurve im Punkte  $m$  ist ein  $C^1$  (d.h. einmal stetig differenzierbare) Abbildung  $c: I \rightarrow M$  wobei  $I$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}$  ist mit  $0 \in I$  und  $c(0) = m$ . Seien  $c_1$  und  $c_2$  Kurven im Punkte  $m$  und  $(U, \varphi)$  eine zulässige lokale Karte mit  $m \in U$ . Dann heißen  $c_1$  und  $c_2$  tangential zueinander im Punkte  $m$  bezüglich  $\varphi$  wenn  $\varphi \circ c_1$  und  $\varphi \circ c_2$  tangential zueinander im Punkte  $0$  sind.

Bemerkung (I.5.) definiert eine Äquivalenzrelation, die, innerhalb einer differenzierbaren Struktur, unabhängig von  $\varphi$  ist. Mit  $[c]_m$  bezeichnen wir eine Äquivalenzklasse von Kurven im Punkte  $m$  mit Repräsentanten  $c$ .

(I.6.) Definition [1;(5.3.)] Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit. Der Tangentialraum von  $M$  in  $m$  ist die Menge der Äquivalenzklassen von Kurven in  $m$ .  $T_m(M) := \{[c]_m: c \text{ ist Kurve in } m\}$ .  $T(M) := \bigcup_{m \in M} T_m(M)$  heißt Tangentialbündel von  $M$ .

Die Abbildung  $\tau_M: TM \rightarrow M$  definiert durch  $\tau_M([c]_m) = m$  heißt Tangentialbündelprojektion von  $M$ .

Bemerkung  $T_m(M)$  ist in kanonischer Weise ein Vektorraum.

(I.7.) Definition [1;(5.6.)] Sei  $f: M \rightarrow N$  eine  $C^1$  Abbildung. Dann definieren wir  $Tf: TM \rightarrow TN$  durch  $Tf([c]_m) = [f \circ c]_{f(m)}$ .  $Tf$  heißt Tangentialabbildung von  $f$ .

(I.8.) Satz [1;(5.7.)] (i) Seien  $f: M \rightarrow N$  und  $g: N \rightarrow K$   $C^1$  Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. Dann ist  $g \circ f: M \rightarrow K$   $C^1$  und  $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$ .

(ii) Wenn  $h: M \rightarrow M$  die Identität ist dann ist  $Th: TM \rightarrow TM$  die Identität.

(iii) Wenn  $f: M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus ist, dann ist  $Tf: TM \rightarrow TN$  eine Bijektion und  $(Tf)^{-1} = T(f^{-1})$ .

Bemerkung Das heißt,  $T$  ist ein Funktor, der Tangentialfunktor.

(I.9.) Definition [1;(6.14.)] Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $\tau_M: TM \rightarrow M$  ihr Tangentialbündel. Das Vektorbündel von r-fach kontravarianten und s-fach kovarianten Tensoren ist  $T_s^r(M) = T_s^r(TM) = \bigcup_{m \in M} T_s^r(T_m) = \bigcup_{m \in M} L^{r+s}(T_m^*, \dots, T_m^*, T_m, \dots, T_m, \mathbb{R})$

wobei  $L^{r+s}$  den Vektorraum der multilinearen Abbildungen bezeichnet und  $T_m^*$  der zu  $T_m$  duale Vektorraum ist.  $T_1^0(M)$  heißt Kotangentialbündel und wird auch mit  $\tau_M^*: T^*M \rightarrow M$  bezeichnet.

Bemerkung In jedem Punkt  $m \in M$  wird über den Vektorraum  $T_m(M)$  die übliche Tensoralgebra gebildet und dann die Vereinigung über  $M$ .

(I.10.) Definition [1;(6.15.)] Ein Tensorfeld von Typ  $\binom{r}{s}$  auf  $M$  ist ein  $C^\infty$  Schnitt von  $T_s^r(M)$ .  $\mathcal{T}_s^r(M)$  bezeichnet die Menge der  $C^\infty$  Schnitte, zusammen mit ihrer reellen Vektorraum-Struktur.  $\mathcal{X}(M)$  bezeichnet die Menge der  $C^\infty$  Abbildungen von  $M$  in  $\mathbb{R}$  zusammen mit ihrer Ring-Struktur:  $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ ,  $(cf)(x) := c(f(x))$ ,  $(fg)(x) := f(x)g(x)$ . Ein Vektorfeld auf  $M$  ist Element von  $\mathcal{X}(M) := \mathcal{T}_0^1(M)$ . Ein Kovektorfeld, oder differenzierbare 1-Form ist Element von  $\mathcal{X}^*(M) := \mathcal{T}_1^0(M)$ .

Bemerkung Ein Vektorfeld ordnet also jedem Punkt  $m \in M$  einen Vektor in  $T_m(M)$  zu.

(I.11.) Definition [1;(6.16.)] Für  $\varphi: M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus und  $t \in \mathcal{T}_s^r(M)$  sei  $\varphi^*t := (T\varphi)_s^r \circ t \circ \varphi^{-1}$ .

(I.12.) Folgerung [1;(6.17.)] (i)  $\varphi^*t \in \mathcal{T}_s^r(N)$

(ii)  $\varphi^*: \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow \mathcal{T}_s^r(N)$  ist ein linearer Isomorphismus.

Bemerkung Der Isomorphismus  $\varphi$  induziert in kanonischer Weise einen Isomorphismus  $\varphi^*$ .

(I.13.) Definition [1;(7.1.)] Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $X \in \mathcal{X}(M)$ . Eine Integralkurve von  $X$  in  $m \in M$  ist eine Kurve  $c: I \rightarrow M$  in  $m$  mit  $X(c(\lambda)) = c'(\lambda) := Tc(\lambda, 1)$  für alle  $\lambda \in I$ . Das Bild einer Integralkurve von  $X$  heißt Bahn von  $X$ .

Bemerkung  $c'(\lambda)$  hängt auch von der Parametrisierung der Kurve ab, nicht nur von der Bahn. Wenn  $\lambda$  Zeit bezeichnet, dann hat  $c'(\lambda)$  die Bedeutung einer Geschwindigkeit.

(I.14.) Definition [1;(7.10.)] Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $X$  ein Vektorfeld auf  $M$ , und  $D_X \subset M \times \mathbb{R} := \{(m, \lambda) \in M \times \mathbb{R} : \text{es gibt eine Integralkurve } c: I \rightarrow M \text{ von } X \text{ in } m \text{ mit } \lambda \in I\}$ .  $X$  heißt vollständig wenn  $D_X = M \times \mathbb{R}$ .

Bemerkung Ein Vektorfeld ist also vollständig wenn jede Integralkurve auf ganz  $\mathbb{R}$  fortgesetzt werden kann.

(I.15.) Satz [1;(7.12.)] Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $X \in \mathcal{X}(M)$ . Dann gilt:

- (i)  $D_X \supset M \times \{0\}$
- (ii)  $D_X$  ist offen in  $M \times \mathbb{R}$
- (iii) Es gibt genau eine Abbildung  $F_X: D_X \rightarrow M$  derart, daß die Abbildung  $t \mapsto F_X(m, t)$  eine Integralkurve von  $X$  im Punkte  $m$  ist für alle  $m \in M$ .

(I.16.) Definition [1;(7.13.)] Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $X \in \mathcal{X}(M)$ . Dann heißt  $F_X$  (I.15.) das Integral von  $X$ , und die Kurve  $t \mapsto F_X(m, t)$  die maximale Integralkurve von  $X$  in  $m$ . Wenn  $X$  vollständig ist, heißt  $F_X$  der Fluß von  $X$ .

Bemerkung "Fluß" heißt bei Abraham [1] "Flow" und bei Dieudonné [4;(18.2.2.)] "coulée". Für geeignetes  $t$  ist die Abbildung  $m \mapsto F_X(m, t)$  ein Diffeomorphismus, und wenn  $X$  vollständig ist, ist  $\{F(-, t) : t \in \mathbb{R}\}$  eine einparametrische Gruppe von Diffeomorphismen. Da  $c: \mathbb{R} \rightarrow M: t \mapsto F_X(m, t)$  eine Integralkurve von  $X$  in  $m$  ist, gewinnen wir wegen (I.13.)  $X$  durch Differentiation zurück. Somit wird eine Bijektion zwischen vollständigen Vektorfeldern und einparametrischen Gruppen von Diffeomorphismen hergestellt.

(I.17.) Definition [1;(8.1.)] Sei  $f \in \mathcal{F}(M)$ , dann ist  $Tf: TM \rightarrow T\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und  $T_m f = Tf|_{T_m M} \in L(T_m M, \{f(m) \times \mathbb{R}\})$ . Dann definieren wir  $df: M \rightarrow T^*(M)$  durch  $df(m) := \text{pr}_2 \circ T_m f$  wobei  $\text{pr}_2$  die Projektion auf den zweiten Faktor bezeichnet.  $df$  heißt das Differential von  $f$ .

Für  $X \in \mathcal{X}(M)$ , definieren wir  $L_X f: M \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $L_X f(m) := df(m)(X(m))$ .  $L_X f$  heißt die Liesche Ableitung von  $f$

bezüglich  $X$ .

Bemerkung Ist  $\{x_i\}_{i \in I}$  ein System von Koordinatenfunktionen von  $M$  in  $m$ , so ist  $\{dx_i\}_{i \in I}$  eine Basis von  $T_m^*(M)$ .

(I.18.) Folgerung [1;(8.2.)] (i)  $df \in \mathcal{X}^*(M)$

(ii)  $L_X f \in \mathcal{F}(M)$

(I.19.) Satz [1;(8.4.)] (i)  $L_X: \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$  ist eine Derivation auf der Algebra  $\mathcal{F}(M)$ , d.h.  $L_X$  ist  $\mathbb{R}$ -linear und, für  $f, g \in \mathcal{F}(M)$   $L_X(fg) = (L_X f)g + f(L_X g)$

(ii) Wenn  $c$  eine konstante Funktion ist, dann ist  $L_X c = 0$ .

(I.20.) Folgerung [1;(8.5.)] Für  $f, g \in \mathcal{F}(M)$  gilt  $d(fg) = (df)g + f(dg)$  und  $c$  ist nur dann konstant, wenn  $dc = 0$  ist.

(I.21.) Satz [1;(8.9.)] Die Menge der Operatoren  $L_X$  auf  $\mathcal{F}(M)$  ist ein reeller Vektorraum und ein  $\mathcal{X}(M)$ -Modul mit  $(fL_X)(g) = f(L_X g)$  und ist isomorph zu  $\mathcal{X}(M)$  als Vektorraum und als  $\mathcal{X}(M)$ -Modul. Insbesondere:  $L_X = 0$  nur dann, wenn  $X = 0$ , und  $L_{fX} = fL_X$ .

(I.22.) Satz [1;(8.10.)] Die Menge aller  $\mathbb{R}$ -linearen Derivationen auf  $\mathcal{F}(M)$  bilden einen reellen Vektorraum der als Vektorraum isomorph zu  $\mathcal{X}(M)$  ist. Insbesondere: für jede Derivation  $\Theta$  existiert genau ein  $X \in \mathcal{X}(M)$  mit  $\Theta = L_X$ .

Bemerkung Wegen dieses Isomorphismus ist es möglich, und für manche Anwendungen zweckmäßig, den Tangentialraum als Menge der Derivationen von  $\mathcal{F}(M)$  zu definieren. (Siehe z.B. Helgason, Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, New York (1962)).

(I.23.) Satz [1;(8.11.)] Seien  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ . Dann ist

$[L_X, L_Y] := L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X$  eine Derivation auf  $\mathcal{F}(M)$ .

(I.24.) Definition [1;(8.12.)]  $[X, Y] = L_X Y$  ist das (eindeutig bestimmte) Vektorfeld derart, daß  $L_{[X, Y]} = [L_X, L_Y]$ .  $L_X Y$  heißt Liesche Ableitung von Y bezüglich X, oder Lie-Klammer von X und Y.

(I.25.) Satz [1;(8.13.)] Der reelle Vektorraum  $\mathcal{X}(M)$  zusammen mit der Verknüpfung  $[-, -]$  ist eine Lie-Algebra, d.h.

(i)  $[-, -]$  ist  $\mathbb{R}$ -bilinear

(ii)  $[X, X] = 0$  für alle  $X \in \mathcal{X}(M)$

(iii)  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$  für alle  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ .

(I.26.) Definition [1;(8.18.)] Sei  $X \in \mathcal{X}(M)$ .  $L_X$  ist der (eindeutig bestimmte) Differentialoperator auf  $\mathcal{F}(M)$  derart, daß

es auf  $\mathcal{F}(M)$  mit  $L_X$  aus (I.17.) und auf  $\mathcal{X}(M)$  mit  $L_X$  aus (I.24.) identisch ist.

(I.27.) Satz [1;(8.21.)] Sei  $t \in \mathcal{F}(M)$ . Dann ist  $L_X t = 0$  genau dann, wenn  $t$  konstant entlang der Integralkurven von  $X$  ist.

(I.28.) Definition [1;(9.1.)] Sei  $E$  ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum. Sei  $\Omega^k(E) := L_a^k(E, \mathbb{R})$  der Vektorraum der schiefsymmetrischen  $k$ -multilinearen Abbildungen von  $E$  in  $\mathbb{R}$ . Ein Element von  $\Omega^k(E)$  heißt äußere  $k$ -Form auf  $E$ . Es ist  $\Omega^0(E) = \mathbb{R}$ ,  $\Omega^1(E) = E^*$ .

(I.29.) Definition [1;(9.2.)] Die alternierende Abbildung  $A: T_k^0(E) \rightarrow T_k^0(E)$  sei definiert durch  $A t := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon_\sigma \sigma \cdot t$

wobei  $S_k$  die Permutationsgruppe und  $\varepsilon_\sigma$  das Signum von  $\sigma$  ist.

(I.30.) Folgerung [1;(9.3.)]  $A$  ist eine lineare Abbildung von  $T_k^0(E)$  auf  $\Omega^k(E)$  und  $A \circ A = A$ .

(I.31.) Definition [1;(9.4.)] Für  $\alpha \in T_k^0(E)$  und  $\beta \in T_l^0(E)$  definieren wir  $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+l}(E)$  durch  $\alpha \wedge \beta := A(\alpha \otimes \beta)$ . Für  $\alpha \in T_0^0(E) = \mathbb{R}$  ist  $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha = \alpha \beta$ .

(I.32.) Folgerung [1;(9.5.)] Für  $\alpha \in T_k^0(E)$ ,  $\beta \in T_l^0(E)$  und  $\gamma \in T_m^0(E)$  gelten:

- (i)  $\alpha \wedge \beta = A \alpha \wedge \beta = \alpha \wedge A \beta$
- (ii)  $\wedge$  ist bilinear
- (iii)  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$
- (iv)  $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$

(I.33.) Definition [1;(9.18.)]

$\omega^k(M) = \omega^k(TM) := \bigcup_{m \in M} \Omega^k(T_m M)$ ,  $\omega_M^k = \omega^k(\tau_M): \omega^k(M) \rightarrow M$  definiert durch  $\omega^k(\tau_M)(x) = m \Leftrightarrow x \in \omega^k(T_m M)$ ,  $\Omega^k(M) :=$  die Menge der Schnitte von  $\omega_M^k$ , und  $\Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$  und  $\Omega^1(M) = \mathcal{F}_1^0(M) = \mathcal{X}^*(M)$ .

Bemerkung Wir haben also in jedem  $T_m(M)$  die äußere Algebra definiert und dann die Vereinigung gebildet wie im Falle der Tensoralgebra.

(I.34.) Definition [1;(10.3.)]  $\Omega(M)$  ist die direkte Summe der  $\Omega^k(M)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , zusammen mit ihrer Struktur als (unendlich-dimensionaler) Vektorraum und der Multiplikation  $\wedge$  komponentweise auf  $\Omega(M)$  fortgesetzt.  $\Omega(M)$  heißt die Algebra der äußeren Differentialformen. Elemente von  $\Omega^k(M)$  sind  $k$ -Formen, und Elemente von  $\Omega^1(M) = \mathcal{X}^*(M)$  sind 1-Formen.

(I.35.) Satz [1;(10.5.)] Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit. Dann

gibt es eine Familie von Abbildungen  $d^k(U): \mathcal{R}^k(U) \rightarrow \mathcal{R}^{k+1}(U)$  ( $U$  offen in  $M$ ), äußere Ableitung genannt, und kurz mit  $d$  bezeichnet, mit:

(i)  $d$  ist eine  $\wedge$ -Antiderivation. Das heißt,  $d$  ist  $\mathbb{R}$ -linear und für  $\alpha \in \mathcal{R}^k(U)$ ,  $\beta \in \mathcal{R}^l(U)$ ,  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$

(ii) Für  $f \in \mathcal{F}(M)$  ist  $df = df$  aus (I.45.) (I.17)

(iii)  $d \circ d = 0$

(iv)  $d(\alpha|_V) = (d\alpha)|_V$  für  $V \subset U$  offen in  $M$

(I.36.) Definition [1; (10.12)] Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit,  $X \in \mathcal{X}(M)$  und  $\omega \in \mathcal{R}^{k+1}(M)$ . Dann definieren wir  $i_X \omega \in \mathcal{R}^k(M)$  durch  $i_X \omega(X_1, \dots, X_k) = (k+1)\omega(X, X_1, \dots, X_k)$ . Für  $\omega \in \mathcal{R}^0(M)$  ist  $i_X \omega := 0$ .  $i_X \omega$  heißt inneres Produkt von  $X$  und  $\omega$ .

(I.37.) Satz [1; (10.13.)] Es gelten:  $i_X: \mathcal{R}^k(M) \rightarrow \mathcal{R}^{k-1}(M)$  und, für  $\alpha \in \mathcal{R}^k(M)$ ,  $\beta \in \mathcal{R}^l(M)$ ,  $f \in \mathcal{R}^0(M)$

(i)  $i_X$  ist eine  $\wedge$ -Antiderivation

(ii)  $i_{fX} \alpha = f i_X \alpha$

(iii)  $i_X df = L_X f$

(iv)  $L_X \alpha = i_X d\alpha + di_X \alpha$ ,

(v)  $L_{fX} \alpha = f L_X \alpha + df \wedge i_X \alpha$

(I.38.) Definition [1; (10.16.)]  $\omega \in \mathcal{R}^k(M)$  heißt geschlossen wenn  $d\omega = 0$  und exakt wenn es ein  $\alpha \in \mathcal{R}^{k-1}(M)$  gibt mit  $\omega = d\alpha$ .

(I.39.) Definition [1; (9.14.)] Seien  $E, F$  Vektorräume,  $\varphi \in L(E, F)$  und  $\alpha \in T_k^0(F)$ .  $\varphi_* \alpha \in T_k^0(E)$  wird definiert durch  $\varphi_* \alpha(e_1, \dots, e_k) = \alpha(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k))$ .

(I.40.) Definition [1; (10.7.)] Seien  $M, N$  Mannigfaltigkeiten,  $F: M \rightarrow N$  eine  $C^\infty$  Abbildung, und  $\omega \in \mathcal{R}^k(N)$ . Wir definieren  $F_* \omega: M \rightarrow \mathcal{R}^k(M)$  durch  $F_* \omega(m) = (T_m F)_* \omega \circ F(m)$ . (Siehe (I.39.))

Bemerkung Dadurch induziert eine  $C^\infty$  Abbildung von Mannigfaltigkeiten eine entsprechende Abbildung in dem Vektorbündel der äußeren Formen.

## II. Symplektische Differentialgeometrie

In diesem Kapitel wird der Begriff einer symplektischen Form definiert und die von der symplektischen Struktur abhängenden Begriffe zusammengestellt. Wir definieren: symplektische Mannigfaltigkeit, Poisson-Klammer, Hamiltonsches Vektorfeld, Hamilton-Funktion, Hamiltonsche Wirkung einer Lie-Gruppe auf einer Mannigfaltigkeit.

(II.1.) Definition [1; (14.1.)] Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $\omega \in \mathcal{X}^2(M)$  nicht ausgeartet (d.h.  $\omega(m)$  ist ein nicht ausgearteter Tensor für alle  $m \in M$ ). Dann definieren wir  $\flat: \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}^*(M)$   $X \mapsto X^\flat := i_X \omega$  und  $\sharp: \mathcal{X}^*(M) \rightarrow \mathcal{X}(M): \alpha \mapsto \alpha^\sharp: \sharp = \flat^{-1}$ .

Bemerkung  $\flat$  ist ein Vektorbündel-Isomorphismus. Die Situation ist ähnlich wie bei einer Riemannschen Metrik; statt eines symmetrischen Tensor haben wir hier einen antisymmetrischen.

(II.2.) Satz (Darboux) [1; (14.7.)] Sei  $\omega$  eine nicht-ausgeartete 2-Form auf einer  $2n$ -Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann ist  $d\omega = 0$  genau dann, wenn es zu jedem  $m \in M$  eine Karte  $(U, \phi)$  gibt mit  $m \in U$ ,  $\phi(m) = 0$  und

$$\phi(u) = (x_1(u), \dots, x_n(u), y_1(u), \dots, y_n(u)) \quad \text{und} \\ \omega|_U = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$$

(II.3.) Definition [1; (14.8.)] Eine symplektische Form (oder symplektische Struktur) auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine nicht-ausgeartete, geschlossene 2-Form auf  $M$ . Eine symplektische Mannigfaltigkeit  $(M, \omega)$  ist eine Mannigfaltigkeit  $M$  zusammen mit einer symplektischen Form  $\omega$  auf  $M$ . Die durch den Satz von Darboux ausgezeichneten Karten heißen symplektische Karten und die Komponentenfunktionen  $x_i, y_i$  heißen kanonische Koordinaten.

(II.4.) Definition [1; (14.9.)]  $(M, \omega)$  und  $(N, \rho)$  seien symplektische Mannigfaltigkeiten. Eine  $C^\infty$  Abbildung  $F: M \rightarrow N$  heißt symplektisch, wenn  $F_* \rho = \omega$ . (siehe (I.40.))

(II.5.) Satz [1; (14.14.)] Sei  $V$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $M = T^*V$ . Betrachten wir  $\mathcal{C}_V^*: M \rightarrow V$  und  $T\mathcal{C}_V^*: TM \rightarrow TV$ . Sei  $\alpha_v \in M$  ( $v \in V$ ) ein Punkt in  $M$  und  $\omega_{\alpha_v}$  ein Punkt in  $TM$  über  $\alpha_v$ .

Definieren wir  $\Theta_{\alpha_v}: T_{\alpha_v} M \rightarrow \mathbb{R}: \omega_{\alpha_v} \mapsto \alpha_v^* \cdot T\mathcal{C}_V^*(\omega_{\alpha_v})$  und  $\Theta_0: \alpha_v \mapsto \Theta_{\alpha_v}$ .

Dann ist  $\theta_0 \in \mathcal{X}^*(M)$  und  $\omega_0 = -d\theta_0$  ist eine symplektische Form auf  $M$ .  $-\theta_0$  und  $\omega_0$  heißen die kanonischen Formen auf  $M$ .

Bemerkung Jede Mannigfaltigkeit besitzt eine Riemannsche Metrik, aber nicht immer eine symplektische Form. Der obige Satz zeigt, daß das Kotangentenbündel  $T^*V$  jeder Mannigfaltigkeit  $V$ , in kanonischer Weise, eine symplektische Form besitzt.

(II.6.) Satz [1; (14.16.)] Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $\phi: M \rightarrow M$  ein Diffeomorphismus. Dann ist  $\phi^*: T^*M \rightarrow T^*M$  ein symplektischer Diffeomorphismus auf  $T^*M$  bezüglich der kanonischen symplektischen Struktur.

(II.7.) Definition [1; (14.23.)] Sei  $(M, \omega)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit und  $f, g \in \mathcal{F}(M)$ . Dann definieren wir  $X_f := (df)^\# \in \mathcal{X}(M)$  und die Poisson-Klammer von  $f$  und  $g$   $\{f, g\} := -i_{X_f} i_{X_g} \omega \in \mathcal{F}(M)$ .

(II.8.) Folgerung [1; (14.24.)] Sei  $(M, \omega)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit und  $f, g \in \mathcal{F}(M)$ . Dann gilt:

$$\{f, g\} = -i_{X_f} i_{X_g} \omega = -L_{X_f} g = +L_{X_g} f.$$

(II.9.) Folgerung [1; (14.25.)] Für  $f_0 \in \mathcal{F}(M)$  ist die Abbildung  $g \mapsto \{f_0, g\}$  eine Derivation auf  $\mathcal{F}(M)$ .

(II.10.) Folgerung [1; (14.26.)] Seien  $(M, \omega)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit und  $f, g \in \mathcal{F}(M)$ . Dann gilt:

$$d\{f, g\} = \{df, dg\} := -[df^\#, dg^\#]^\flat.$$

(II.11.) Satz [1; (14.27.)] Der reelle Vektorraum  $\mathcal{F}(M)$ , zusammen mit der Verknüpfung  $\{-, -\}$  ist eine Lie-Algebra.

(II.12.) Folgerung [1; (14.28.)]  $X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g]$ .

(II.13.) Satz [1; (14.30.)] Sei  $(M, \omega)$  und  $(N, \rho)$  symplektische Mannigfaltigkeiten und  $F: M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus. Dann ist  $F$  genau dann symplektisch wenn  $F$  die Poisson-Klammer aller Funktionen erhält.

Bemerkung Ein symplektischer Diffeomorphismus ist ein Isomorphismus in der Kategorie der symplektischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Wir erkennen hier auch den Begriff einer kanonischen Transformation. (Siehe H. Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1950), Abschnitt 8-3 und 8-4.) Eine Transformation heißt kanonisch, wenn sie die Form der Hamilton-Gleichungen erhält, und das gilt genau dann, wenn die Transformation alle Poisson-Klammer Beziehungen erhält. Die Erforschung des mathematischen modells für die klassische Mechanik, (im Hamilton-Formalismus),



ist also gleichwertig mit der Untersuchung der Kategorie der symplektischen Mannigfaltigkeiten.

(II.14.) Satz [1;(14.31.)] Sei  $(M, \omega)$  eine  $2n$ -Mannigfaltigkeit und  $f, g \in \mathcal{F}(M)$ . Sei  $(U, \varphi)$  eine symplektische Karte (Siehe (II.3.)). Dann gilt:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)$$

(II.15.) Definition [1;(16.14.)] Sei  $(M, \omega)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit und  $X \in \mathcal{X}(M)$ . Dann heißt  $X$  (global) Hamiltonsch wenn es ein  $H \in \mathcal{F}(M)$  gibt mit  $X = X_H = (dH)^\#$ .

$H$  heißt Hamilton-Funktion für  $X$ .

(II.16.) Satz [1;(16.12.)] Sei  $X$  ein Hamiltonsches Vektorfeld auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit  $(M, \omega)$  mit Hamilton-Funktion  $H$ . Sei  $(V, \varphi)$  eine symplektische Karte mit  $\varphi(v) = (q_1(v), \dots, q_n(v), p_1(v), \dots, p_n(v))$ . Dann ist eine Kurve  $c(t)$  auf  $V$  genau dann eine Integralkurve von  $X$  wenn

$$\frac{dq_i}{dt}(c(t)) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(c(t)) \quad \frac{dp_i}{dt}(c(t)) = - \frac{\partial H}{\partial q_i}(c(t)) \quad i=1, \dots, n$$

(II.17.) Definition [1;(22.3.)] Sei  $G$  eine Lie-Gruppe. Mit  $\mathcal{L}_G$  bezeichnen wir die Lie-Algebra der Linksinvarianten Vektorfelder auf  $G$ . Der Tangentialraum zu  $G$  im Punkte  $e$ , ( $e$  ist Einheit der Gruppe),  $T_e G$  ist als Vektorraum isomorph zu  $\mathcal{L}_G$ .  $T_e G$  zusammen mit der durch diesen Isomorphismus induzierten Lie-Klammer Operation heißt Lie-Algebra von  $G$  und wird mit  $\mathcal{L}_G$  bezeichnet.

(II.18.) Satz [1;(22.4.)] Sei  $G$  eine Lie-Gruppe und  $X \in \mathcal{L}_G$ . Dann ist  $X$  vollständig.

(II.19.) Definition [1;(22.5.)] Sei  $F_X$  der Fluß von  $X \in \mathcal{L}_G$ . Dann heißt die Abbildung  $X \mapsto F_X(e, t) =: \exp(tX)$  die Exponentialabbildung.

(II.20.) Definition [1;(22.8.)] Sei  $G$  eine Lie-Gruppe und  $M$  eine Mannigfaltigkeit. Eine (differenzierbare) Wirkung von  $G$  auf  $M$  ist ein Gruppenhomomorphismus  $\bar{\Phi}$  von  $G$  in die Gruppe  $D(M)$  der Diffeomorphismen von  $M$  derart, daß die Abbildung  $G \times M \rightarrow M: (g, m) \mapsto \bar{\Phi}(g)(m)$   $C^\infty$  ist.

(II.21.) Definition [1;(22.9.)] Sei  $\bar{\Phi}: G \rightarrow D(M)$  eine Wirkung von  $G$  auf  $M$ ,  $x \in \mathcal{L}_G$  und  $X \in \mathcal{L}_G$  mit  $X(e) = x$ . Sei  $F_X: G \times \mathbb{R} \rightarrow G$  der Fluß von  $X$ . Dann ist  $H_X: M \times \mathbb{R} \rightarrow M: (m, t) \mapsto \bar{\Phi}(F_X(e, t))(m) = \bar{\Phi}(\exp(tx))(m)$  ein Fluß auf  $M$ . Sei  $Y_X \in \mathcal{X}(M)$  das (eindeutig bestimmte) Vektorfeld derart, das  $H_X$  Fluß von  $Y_X$  ist. Dann

heißt der Lie-Algebra Homomorphismus  $\Phi': \mathcal{L}_G \rightarrow \mathcal{X}(M): x \mapsto Y_x$  der infinitesimale Erzeugende von  $\Phi$ , und  $Y_x$  heißt die infinitesimale Transformation von  $x$ .

(II.22.) Definition [1;(22.12.)] (i) Sei  $\Phi$  eine Wirkung einer Lie-Gruppe auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann heißt  $\Phi$  Hamiltonsch, wenn  $\Phi'(\mathcal{L}_G) \subset \{X \in \mathcal{X}(M): X \text{ ist Hamiltonsch}\}$ , das heißt, wenn jede infinitesimale Transformation von  $\Phi$  Hamiltonsch ist.

(ii) Sei  $H \in \mathcal{F}(M)$  und  $\Phi$  eine Hamiltonsche Wirkung von  $G$  derart, daß  $H$  unter  $\Phi(g)$  invariant ist für alle  $g \in G$ . Dann heißt  $G$  eine Symmetriegruppe von  $H$  unter der Wirkung  $\Phi$ .

(II.23.) Satz [1;(22.13.)] Sei  $\Phi: G \rightarrow D(M)$  eine Hamiltonsche Wirkung auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit  $M$  und  $H \in \mathcal{F}(M)$ . Dann ist  $H$  genau dann invariant unter  $\Phi$ , wenn  $L_{Y_H} H = 0$  für alle infinitesimale Transformationen  $Y \in \Phi'(\mathcal{L}_G)$ . In diesem Falle gilt: Wenn  $K \in \mathcal{F}(M)$  eine Hamilton-Funktion für  $Y$  ist, d.h.  $Y = X_K = (dK)^\#$ , dann ist  $K$  eine Konstante der Bewegung (d.h.  $K$  ist konstant entlang der Integralkurven von  $X_H$ ).

(II.24.) Definition Ein dynamisches System ist ein Paar  $(M, X)$ , wobei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, und  $X \in \mathcal{X}(M)$  ein Vektorfeld auf  $M$  ist.

(II.25.) Definition Ein Hamiltonsches dynamisches System ist ein Tripel  $(M, \omega, H)$ , wobei  $(M, \omega)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit und  $H \in \mathcal{F}(M)$  ist. Wegen  $X_H = (dH)^\# \in \mathcal{X}(M)$  ist ein Hamiltonsches dynamisches System Spezialfall eines dynamischen Systems.

### III. Zur Bedeutung der symplektischen Form

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, daß eine symplektische Form uns erlaubt, eine Abbildung  $\{-, -\}: \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$  zu definieren, die eine Lie-Algebra Struktur auf  $\mathcal{F}(M)$  definiert, so daß die dadurch definierte Derivation  $\{-, f\}: \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$  die Lie-Ableitung  $L_{X_f}$  auf  $\mathcal{F}(M)$  ist. Diese Abbildung wurde Poisson-Klammer genannt. In diesem Kapitel wollen wir die umgekehrte Richtung betrachten. Wir fangen mit einer anderen Definition der Poisson-Klammer an, die von Dirac [5] vorgeschlagen und von Pauli [11] und Jost [7] diskutiert worden ist. Das Kapitel endet mit einer Vermutung über die Gründe, aus denen die symplektische Form für die klassische Mechanik von Bedeutung ist.

(III.1.) Definition [7] Eine Poisson-Klammer ist eine Abbildung  $\{-, -\}: \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$  mit den folgenden Eigenschaften: für  $f, f_1, f_2, g, h \in \mathcal{F}(M)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ :

- (a)  $\{f, g\} = -\{g, f\} \in \mathcal{F}(M)$
- (b)  $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$
- (c)  $\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2$
- (d)  $\{f, c\} = 0$
- (e)  $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$
- (f) Das Tensorfeld  $\Lambda \in \mathcal{T}_0^2(M)$  definiert durch  $\Lambda(df, dg) = \{f, g\}$  ist nirgends ausgeartet.

Bemerkung Die Widerspruchsfreiheit von  $\Lambda$  in (f) hängt von den anderen Eigenschaften ab. Der gemeinsame Name Poisson-Klammer wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt.

(III.2.) Satz (i) Eine Poisson-Klammer (III.1.) erzeugt eine geschlossene symplektische Form .

(ii) Die mittels  $\omega$  definierte Poisson-Klammer (II.7.) stimmt mit der aus (III.1.) überein.

Beweis (i) Für den vollen Beweis siehe Jost [7]. Er zeigt u.a., daß die Jacobi Identität genau dann erfüllt ist, wenn  $d\omega = 0$  ist, das heißt  $\omega$  geschlossen. Weil  $\Lambda$  nirgends ausgeartet ist, induziert es einen Vektorbündel-Isomorphismus  $\#: \mathcal{X}^*(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ , und somit ein nirgends ausgeartetes Tensorfeld  $\omega \in \mathcal{T}_2^0(M)$  mittels  $\omega(df^\#, dg^\#) = \{f, g\}$ , das wegen (a) antisymmetrisch ist.

(ii) Es ist aber  $\omega(df^\#, dg^\#) = \omega(X_f, X_g) = i_{X_f} \omega(-, X_g) = i_{X_g} i_{X_f} \omega = -i_{X_f} j_{X_g} \omega$  (siehe (II.1.), (I.36.) und (II.7.)). ■

(III.3.) Satz Eine Abbildung  $\{-,-\}: \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$  ist genau dann eine Poisson-Klammer, wenn gelten:

- (i) Der Vektorraum  $\mathcal{F}(M)$  und die Verknüpfung  $\{-,-\}$  bilden eine reelle Lie-Algebra.
- (ii)  $\{-,g\}$  ist eine Derivation auf der assoziativen Algebra  $\mathcal{F}(M)$ .
- (iii) Das Tensorfeld  $\Lambda \in \mathcal{T}_0^2(M)$  definiert durch  $\Lambda(df, dg) = \{f, g\}$  ist nirgends ausgeartet.

Beweis "(III.1.)  $\Rightarrow$  (III.3.) (i)" In (c) nehmen wir  $f_1 \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2$ , aber wegen (d) und (a) ist  $\{f_1, g\} = 0$ , also  $\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\}$ . Also ist  $\{-,-\}$  wegen (b)  $\mathbb{R}$ -linear in der ersten Stelle. Wegen (a) ist  $\{-,-\}$  dann  $\mathbb{R}$ -bilinear. In (a) setzen wir  $f = g$ . Dann ist  $\{f, f\} = -\{f, f\}$ , also  $\{f, f\} = 0$  für alle  $f \in \mathcal{F}(M)$ . (e) ist die Jacobi Identität. Also bildet die Poisson-Klammer eine Lie-Algebra.

"(III.1.)  $\Rightarrow$  (III.3.) (ii)" Wie oben, ist  $\{-,g\}$   $\mathbb{R}$ -bilinear, und wegen (c) eine Derivation auf  $\mathcal{F}(M)$ .

"(III.3.)  $\Rightarrow$  (III.1.)" Wegen  $\mathbb{R}$ -Bilinearität gilt (b). So ist auch, wegen der Lie-Algebra Eigenschaft  $0 = \{f+g, f+g\} = \{f+g, f\} + \{f+g, g\} = \{f, f\} + \{g, f\} + \{f, g\} + \{g, g\} = \{g, f\} + \{f, g\} \Rightarrow \{f, g\} = -\{g, f\}$  so gilt auch (a). (c) gilt weil  $\{-,g\}$  eine Derivation auf  $\mathcal{F}(M)$  ist. Wegen  $\mathbb{R}$ -Bilinearität gilt:  $\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\}$  wenn  $f_1 \in \mathbb{R}$  ist. Dann ist wegen der Derivationseigenschaft (c),  $\{f_1, g\} = 0$  für  $f_1 \in \mathbb{R}$ , also gilt auch (d). Weil  $\{-,-\}$  eine Lie-Algebra ist, gilt auch (e), und (f) ist nichts anderes als (iii). ■

Wir sehen also, daß die symplektische Form mit der Poisson-Klammer äquivalent ist. Weiterhin ist es bekannt, daß sich die klassische Mechanik "koordinatenfrei" durch die Poisson-Klammer formulieren läßt ("Bewegungs-Gleichungen in Poisson-Klammer Form"). Wir haben auch gesehen, daß die Poisson-Klammer nichts anderes ist, als eine Lie-Algebra Struktur und eine Derivation auf der Funktionenalgebra  $\mathcal{F}(M)$ . Die reellwertigen Funktionen  $\mathcal{F}(M)$  haben auch eine wichtige physikalische Bedeutung: sie sind genau die Observablen (beobachtbaren Größen) in der Mechanik. Mittels der symplektischen Form, und zwar durch die Abbildung:  $(d-)^{\#}: \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M): f \mapsto (df)^{\#} = X_f$ , erzeugen die Observablen lokale Diffeomorphismen (und manchmal globale Gruppen von Diffeomorphismen).

Wir erkennen also die symplektische Form (bzw. die Poisson-Klammer) als eine Möglichkeit, die klassische Mechanik "koordinatenfrei" darzustellen, wobei die Bedeutung der Observablen als Erzeugende von Transformationen stark zur Geltung kommt.

#### IV. Reduktion auf eine kleinere Dimension

Eine Möglichkeit, ein dynamisches System zu vereinfachen, liegt darin, ihre Dimensionszahl zu reduzieren. Der erste Satz dieses Kapitels gibt Bedingungen an, die es ermöglichen, eine Untermannigfaltigkeit zu finden, auf die das System reduzieren läßt, ohne einen Verlust an Information. Der zweite Satz gibt eine Bedingung an, unter der die Reduktion wieder ein Hamiltonsches dynamisches System liefert.

Wenn die Funktionen im Satz (IV.1.) eine Symmetriegruppe erzeugen (II.22.), liefert der Satz ein Beispiel für die Ausnutzung einer Symmetrie zur Vereinfachung des Problems. Wenn das reduzierte System außerdem noch Hamiltonsch ist, kann es dann als "äquivalent" zu einem anderen mechanischen Problem interpretiert werden.

(IV.1.) Satz [4;(16.8.9.)] Sei  $Y$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit,  $(f_i)_{1 \leq i \leq r}$  eine endliche Familie von Funktionen aus  $\mathcal{F}(M)$ . Sei  $X := \{x \in Y: f_i(x) = 0 \text{ für alle } i \text{ mit } 1 \leq i \leq r\}$ . Seien, für jedes  $x \in X$ , die Differentiale  $(d_x f_i)_{1 \leq i \leq r}$  linear unabhängige Kovektoren in  $T_x^*(Y)$ . Dann gilt:

(i)  $X$  ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von  $Y$ , und für jedes  $x \in X$ ,  $T_x(X)$  ist im Kern von jedem  $d_x f_i$ .

(ii) Es ist also  $\dim_x(X) = \dim_x(Y) - r$ .

Bemerkung Dieser Satz erlaubt uns, zunächst ohne Rücksicht auf die symplektische Form, die Mannigfaltigkeit zu reduzieren, wenn wir solche Funktionen wie oben haben, und  $\{f_i, H\} = 0$ . Wegen (I.27.) und (II.8.) sind dann die Bahnen von  $H$  in der Untermannigfaltigkeit enthalten. Die Bahn ist also enthalten in der Fläche von konstantem  $f_i$ , und insbesondere, Wegen  $\{H, H\} = 0$  in der Fläche konstanter Energie (Energiefläche).

(IV.2.) Satz Sei  $(M, \omega)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit und  $N$  eine Untermannigfaltigkeit von  $M$ . Dann ist  $(N, \omega|_N)$  genau dann eine symplektische Mannigfaltigkeit, wenn  $\omega|_N$  nicht ausgeartet ist.

Beweis Wegen (II.3.) müssen wir nachprüfen, ob  $\omega|_N$  (i) antisymmetrisch und (ii) geschlossen ist. (i) Wenn  $\omega|_N$  nicht antisymmetrisch wäre, so gäbe es  $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(N)$  mit  $\omega(X_1, X_2) \neq -\omega(X_2, X_1)$ . Aber, wegen  $\mathcal{X}(N) \subset \mathcal{X}(M)$  wäre dann  $\omega$  nicht antisymmetrisch, was ein Widerspruch ist.

(ii) Nach Abraham [1;(10.9.)] ist  $d$  natürlich bezüglich

Abbildungen, d.h. für  $F: N \rightarrow M$  eine  $C^\infty$  Abbildung und  $\omega \in \mathcal{N}^k(M)$  ist  $F_*\omega \in \mathcal{N}^k(N)$  (siehe (I.40.)) und es gilt:  $F_*(d\omega) = d(F_*\omega)$ . Für  $N \subset M$  eine Untermannigfaltigkeit und  $i: N \rightarrow M$  die ( $C^\infty$ ) Inklusion, haben wir  $i_*(d\omega) = d(i_*\omega) \Rightarrow (d\omega)|_N = d(\omega|_N)$ , also  $d\omega = 0 \Rightarrow d(\omega|_N) = 0$ , d.h.  $\omega$  geschlossen  $\Rightarrow \omega|_N$  geschlossen. ■

## V. Keplerproblem und erste Reduktion

In diesem Kapitel formulieren wir das Keplerproblem in der symplektisch differentialgeometrischen Sprache. Dann führen wir die übliche "Reduktion auf ein äquivalentes 1-Körper Problem" durch, d.h. wir gehen zu Relativkoordinaten über.

(V.1.) Technisches Lemma Sei  $M = T^*\mathbb{R}^n$  mit der kanonischen symplektischen Struktur (II.5.). Dann wählen wir  $q_i, p_i, i = 1, 2, \dots, n$  als kanonische Koordinaten (II.3.). Die  $q_i$ 's sind die Koordinaten von  $\mathbb{R}^n$ , die global existieren. Da  $M = T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  ist, existieren auch die  $p_i$ 's global. Damit ist  $\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$

(i) Sei  $X \in \mathcal{X}(M)$  mit  $X: M \rightarrow TM: (\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (\vec{q}, \vec{p}; \vec{x}, \vec{y})$ . Dann ist  $X^\flat = \vec{x} \cdot d\vec{p} - \vec{y} \cdot d\vec{q}$

(ii) Sei  $\alpha \in \mathcal{X}^*(M)$  mit  $\alpha = \vec{x}' \cdot d\vec{q} + \vec{y}' \cdot d\vec{p}$ . Dann ist  $\alpha^\#: M \rightarrow TM: (\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (\vec{q}, \vec{p}; \vec{y}', -\vec{x}')$

Beweis (i) Nach (II.1.) ist  $X^\flat = i_X \omega = \omega(X, -) = \sum_{i=1}^n (dq_i \wedge dp_i)(X, -) = \sum_{i=1}^n (dq_i \otimes dp_i - dp_i \otimes dq_i)(X, -) = \sum_{i=1}^n (x_i dp_i - y_i dq_i)$ .

(ii) Das ist die Umkehrung von (i). ■

(V.2.) Definition [1; (32.1.)] Modell I für das Kepler Problem ist das Tripel  $(M, \omega, H^\mu)$  mit

(i)  $M = T^*W, W = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) - \Delta, \Delta = \{(\vec{q}, \vec{q}): \vec{q} \in \mathbb{R}^3\}$  mit der kanonischen symplektischen Form  $\omega$ .

(ii)  $\mu \in \mathbb{R}, \mu > 0$

(iii)  $H^\mu \in \mathcal{X}(M)$  definiert durch:

$$H^\mu(\vec{q}, \vec{q}', \vec{p}, \vec{p}') = \frac{|\vec{p}|^2}{2\mu} + \frac{|\vec{p}'|^2}{2} - \frac{1}{|\vec{q} - \vec{q}'|}$$

mit  $\vec{q}, \vec{q}' \in \mathbb{R}^3, \vec{p}, \vec{p}' \in \mathbb{R}^{3*}$  und  $|\cdot|$  ist die euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^3$ .

Bemerkung  $\Delta$  wird aus  $M$  herausgenommen, so daß  $H^\mu$  dann in  $\mathcal{X}(M)$  ist.  $X_{H^\mu}$  ist nicht vollständig für jedes  $m \in M$ , da die Integralkurve durch  $\Delta$  laufen kann, (Stoßbahn).

(V.3.) Satz [1; (32.2.)] In Modell I, sind die Komponenten von  $\vec{p} + \vec{p}'$  Konstanten der Bewegung.

Beweis Wir betrachten die Gruppe  $G = (\mathbb{R}^3, +)$  mit Wirkung  $\Phi$



(II.20.) auf  $W$ , definiert durch:  $\bar{\Phi}(\vec{r}): (\vec{q}, \vec{q}') \mapsto (\vec{q} + \vec{r}, \vec{q}' + \vec{r})$ .  
 $\Delta$  ist invariant unter  $\bar{\Phi}$ . Da  $\bar{\Phi}$  ein Diffeomorphismus ist, ist nach (II.6.) die induzierte Wirkung auf  $M$  ein symplektischer Diffeomorphismus  $\bar{\Phi}^*$  mit  $\bar{\Phi}^*(\vec{r}) = \bar{\Phi}(\vec{r})^*: (\vec{q}, \vec{q}'; \vec{p}, \vec{p}') \mapsto (\vec{q} + \vec{r}, \vec{q}' + \vec{r}; \vec{p}, \vec{p}')$ . Jetzt betrachten wir eine Erzeugende  $(\vec{0}, \vec{r}_0) \in \mathcal{L}_G$  der Gruppe  $(\mathcal{L}_G, \text{als Menge, ist gleich } T_e G, \text{ siehe (II.17.)})$ . Das dazugehörige linksinvariante Vektorfeld auf  $G$  ist dann  $X \in \mathcal{L}_G$ .  $X(\vec{r}) = (\vec{r}, \vec{r}_0)$ . Der Fluß von  $X$  ist dann  $F_X(t, \vec{r}) = \vec{r} + t\vec{r}_0$ . Der (durch  $\bar{\Phi}$ ) induzierte Fluß auf  $M$  ist dann  $H_X(t, \vec{q}, \vec{q}', \vec{p}, \vec{p}') = (\vec{q} + t\vec{r}_0, \vec{q}' + t\vec{r}_0, \vec{p}, \vec{p}')$ . Das dazugehörige Vektorfeld (infinitesimale Transformation), (siehe (II.21.)) ist also  $Y_X(\vec{q}, \vec{q}', \vec{p}, \vec{p}') = (\vec{q}, \vec{q}', \vec{p}, \vec{p}'; \vec{r}_0, \vec{r}_0, \vec{0}, \vec{0})$ . Nach (V.1.) ist dann  $Y_X^\flat = (-\vec{0})d\vec{q} + (-\vec{0})d\vec{q}' + (\vec{r}_0)d\vec{p} + (\vec{r}_0)d\vec{p}' = \vec{r}_0(d\vec{p} + d\vec{p}') = d((\vec{r}_0) \cdot (\vec{p} + \vec{p}'))$ . Es ist also  $Y_X = (d(\vec{r}_0 \cdot \vec{p} + \vec{r}_0 \cdot \vec{p}'))^\sharp$ , so daß jede infinitesimale Transformation Hamiltonsch ist, und somit ist nach (II.22.)  $\bar{\Phi}^*$  Hamiltonsch.  $H$  ist klarerweise invariant unter  $\bar{\Phi}^*$ , und da  $\vec{r}_0 \cdot \vec{p} + \vec{r}_0 \cdot \vec{p}'$  eine Hamilton-Funktion für  $Y_X$  ist, ist  $\vec{r}_0 \cdot (\vec{p} + \vec{p}')$  nach (II.23.) eine Konstante der Bewegung. Somit ist auch  $\vec{p} + \vec{p}'$  eine Konstante der Bewegung. ■

(V.4.) Definition  $\tilde{q} := \frac{\mu q + q'}{\mu + 1}$   $\tilde{q}' := q - q'$

$\tilde{q}$  heißt Schwerpunktkoordinate und  $\tilde{q}'$  heißt Relativkoordinate.  
Bemerkung Damit haben wir  $d\tilde{q} = \frac{\mu}{\mu+1}dq + \frac{1}{\mu+1}dq'$ ,  $d\tilde{q}' = dq - dq'$ ,  
 $p = \mu dq$ ,  $p' = dq'$ ,  $\tilde{p} = (\mu+1)d\tilde{q}$ ,  $\tilde{p}' = \frac{\mu}{\mu+1}d\tilde{q}'$  wobei  $\mu+1$  die Gesamtmasse und  $\frac{\mu}{\mu+1}$  die reduzierte Masse ist.

(V.5.) Lemma  $\tilde{p} = p + p'$  und heißt Schwerpunktimpuls,

$\tilde{p}' = \frac{1}{\mu+1}(p - \mu p')$  und heißt Relativimpuls,

$$q = \tilde{q} + \frac{1}{\mu+1}\tilde{q}', \quad q' = \tilde{q} - \frac{\mu}{\mu+1}\tilde{q}',$$

$$p = \frac{\mu}{\mu+1}\tilde{p} + \tilde{p}', \quad p' = \frac{1}{\mu+1}\tilde{p} - \tilde{p}'$$

$$H = \frac{|p|^2}{2\mu} + \frac{|p'|^2}{2} - \frac{1}{|q - q'|} = \frac{|\tilde{p}|^2}{2(\mu+1)} + \frac{|\tilde{p}'|^2}{2\mu/(\mu+1)} - \frac{1}{|\tilde{q}'|}.$$

Beweis Es ist eine direkte Berechnung. ■

Bemerkung Da  $\tilde{p} = p + p'$  eine Konstante der Bewegung ist, haben  $H$  und  $H' := H - \frac{|\tilde{p}|^2}{2(\mu+1)} = \frac{|\tilde{p}'|^2}{2\mu/(\mu+1)} - \frac{1}{|\tilde{q}'|}$  dieselben Integralkurven bezüglich  $\tilde{p}'$  und  $\tilde{q}'$ . Somit kommen wir zu Modell II (VI.1.).

Bemerkung Bei dem Übergang von Modell I zu Modell II wird die Dimensionszahl um 6 verkleinert. Dieser Übergang ist nur zum Teil ein Beispiel einer Reduktion auf Grund der drei

Konstanten der Bewegung und Satz (IV.1.). In der Tat haben wir eine Entkopplung: die neuen Hamilton-Gleichungen lauten  $\dot{\tilde{q}} = \frac{\tilde{p}}{\mu+1}$ ,  $\dot{\tilde{p}} = 0$ ,  $\dot{\tilde{q}'} = \frac{\tilde{p}'}{\mu/(\mu+1)}$ ,  $\dot{\tilde{p}'} = \frac{\tilde{q}'}{|\tilde{q}'|^3}$ . Es sind also  $\tilde{q}$  und  $\tilde{p}$  von  $\tilde{q}'$  und  $\tilde{p}'$  entkoppelt.

Der Phasenraum ist  $M = M_1 \times M_2$  mit  $M_1 \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ,  $M_2 \cong (\mathbb{R}^3 - \{0\}) \times \mathbb{R}^3$ .  $H \in \mathcal{H}(M)$ ,  $H = H_1 + H_2$  mit

$$H_1 = \frac{|\tilde{p}|^2}{2(\mu+1)}, \quad H_2 = \frac{|\tilde{p}'|^2}{2\mu/(\mu+1)} - \frac{1}{|\tilde{q}'|}.$$

Jetzt ist  $H_1$  (bzw.  $H_2$ ) konstant auf  $M_2$  (bzw.  $M_1$ ). Wir haben also um drei Dimensionen reduziert wegen  $\dot{\tilde{p}} = 0$ . Weiterhin haben wir drei Dimensionen (Schwerpunktkoordinaten) außer Acht gelassen, weil sie trivial sind ( $\tilde{q} = \frac{\tilde{p}t}{\mu+1}$ ). Diese Verkleinerung um 6 Dimensionen liefert wieder ein Hamiltonsches dynamisches System, (Modell II), das wir als äquivalentes 1-Körper Problem interpretieren können.

## VI. Stufenweise Reduktion

Zunächst stellen wir das zweite Modell für das Keplerproblem auf, das auch in den folgenden Kapiteln als Grundlage dienen wird. Modell II ist äquivalent zu einem 1-Körper Problem und hat einen 6-dimensionalen Phasenraum. Auf Grund bestimmter Konstanten der Bewegung, wird das Problem stufenweise reduziert. Die Rotationssymmetrie erlaubt eine Reduktion auf 4 Dimensionen. Wegen der Erhaltung eines weiteren Vektors können wir dann auf eine 2-dimensionale symplektische Mannigfaltigkeit, Modell IV, reduzieren. In dieser 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit wird dann die Bahngleichung gefunden.

Die Reduktion auf Grund der Drehimpulserhaltung ist üblich und deshalb lehrreich, weil sie zeigt, wie die Bewegung dadurch eingeschränkt wird. Dabei hat man drei unabhängige Konstanten der Bewegung, reduziert das Problem aber nur um zwei Dimensionen. Die letzte Reduktion, auf das 2-dimensionale Modell IV ist nicht üblich. Diese Reduktion, zusammen mit dem Satz (VI.15.), in dem die Bahngleichung gefunden wird, dient als weiteres Beispiel der Reduktion und der differentialgeometrischen Methode.

(VI.1.) Definition [1;(32.4.)] Modell II für das Kepler Problem ist das Tripel  $(M, \omega, H)$  mit

(i)  $M = T^*U, \quad U = \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$

(ii)  $\mu \in \mathbb{R}, \quad \mu > 0$

(iii)  $H \in \mathcal{F}(M)$  definiert durch:  $H(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{|\vec{p}|^2}{2\mu} - \frac{1}{|\vec{q}|}$ .

Bemerkung  $\mu$  ist jetzt die reduzierte Masse.

(VI.2.) Satz [1;(32.5.)] (Erhaltung des Drehimpulses) Im Modell II sind die folgenden Größen Konstanten der Bewegung:

$(L_1, L_2, L_3) := (q_2 p_3 - q_3 p_2, q_3 p_1 - q_1 p_3, q_1 p_2 - q_2 p_1)$  wobei

$\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$  und  $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$  sind.

Beweis Wir betrachten die Lie-Gruppe  $G = SO(3)$  von Rotationen von  $\mathbb{R}^3$ . Der Punkt  $\{\vec{0}\}$  ist invariant, und die Wirkung von  $G$  auf  $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$  ist die Einschränkung der oberen. Diese Wirkung induziert dann eine symplektische Wirkung auf  $T^*(\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\})$  (siehe (II.6.)), die aus Rotationen im  $\vec{q}$ -Raum,  $U$ , und den gleichen Rotationen im  $\vec{p}$ -Raum besteht. Betrachten wir zunächst die einparametrische Untergruppe der Drehungen um die  $q_3$ -Achse, mit Wirkung  $\Phi^*$ . Dann haben wir explizit:

$\Phi^*: (\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta, q_2 \cos \theta - q_1 \sin \theta, q_3, p_1 \cos \theta + p_2 \sin \theta, p_2 \cos \theta - p_1 \sin \theta, p_3)$ . Die infinitesimale Transformation auf  $M$  ist also  $Y(\vec{q}, \vec{p}) = (\vec{q}, \vec{p}; q_2, -q_1, 0, p_2, -p_1, 0)$ . Dann ist  $Y^\flat = q_1 dp_2 + p_2 dq_1 - q_2 dp_1 - p_1 dq_2 = d(q_1 p_2 - q_2 p_1)$ , also ist  $Y = (d(q_1 p_2 - q_2 p_1))^\sharp$ , also  $\Phi^*$  Hamiltonsch, mit Hamilton-Funktion  $q_1 p_2 - q_2 p_1 = L_3$ . Die anderen Komponenten sind dann analog. ■

(VI.3.) Lemma Die drei Kovektoren  $dL_1$ ,  $dL_2$  und  $dL_3$  sind linear unabhängig für  $L \neq 0$ .

Beweis  $0 = \vec{c} \cdot d\vec{L} = (\vec{c} \times \vec{q}) \cdot d\vec{p} - (\vec{c} \times \vec{p}) \cdot d\vec{q} \Rightarrow \vec{c} \times \vec{q} = 0$  und  $\vec{c} \times \vec{p} = 0$ . Wegen  $\vec{q} \neq 0$  bleiben drei Möglichkeiten:

(1)  $\vec{p} = 0$ ,  $\vec{c} \parallel \vec{q}$ ; (2)  $\vec{p} \neq 0$ ,  $\vec{c} \parallel \vec{q}$ ,  $\vec{c} \parallel \vec{p} \Rightarrow \vec{q} \parallel \vec{p}$ ; (3)  $\vec{p} \neq 0$ ,  $\vec{c} \not\parallel \vec{p} \Rightarrow \vec{c} = 0$ . (1)+(2)  $\Rightarrow \vec{L} = 0 \Rightarrow$  Stoßbahn. (3)  $\Rightarrow$  linear unabhängig. ■

(VI.4.) Lemma Sei  $(L_1, L_2, L_3)$  wie in (VI.2.) definiert.

Dann gelten:

- (i)  $\{L_i, L_j\} = L_k$  mit  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  und zyklisch
- (ii) Wenn  $L_i$  und  $L_j$ ,  $i \neq j$ , Konstanten der Bewegung sind, dann ist auch  $L_k$ ,  $i \neq j$ ,  $i \neq k$ ,  $j \neq k$ , eine Konstante der Bewegung.

Beweis (i) Es ist z.B. nach (II.14.)

$$\{L_1, L_2\} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial L_1}{\partial q_i} \frac{\partial L_2}{\partial p_i} - \frac{\partial L_1}{\partial p_i} \frac{\partial L_2}{\partial q_i} \right) = q_1 p_2 - q_2 p_1 = L_3.$$

(ii) Wegen der Jacobi Identität (II.11.) ist

$\{\{L_1, L_2\}, H\} + \{\{L_2, H\}, L_1\} + \{\{H, L_1\}, L_2\} = 0$ . Da  $L_1$  und  $L_2$  Konstanten der Bewegung sind, ist  $\{L_2, H\} = \{H, L_1\} = 0$  und somit  $\{L_3, H\} = \{\{L_1, L_2\}, H\} = 0$ . ■

Bemerkung Wir haben also, von der drei-dimensionalen Gruppe  $SO(3)$  her, drei Konstanten der Bewegung (Im Gegensatz zu der Bemerkung von Abraham [1], pg, 191,  $SO(3)$  wäre zwei-dimensional.). Die Tatsache, daß die drei Drehimpuls-Funktionen bezüglich der Poisson-Klammer nicht unabhängig sind, stört die Reduktionsfrage nicht. Nach (IV.1.) wäre es immer noch möglich, um drei Dimensionen zu reduzieren. Aber eine Reduktion um drei Dimensionen kann zu keiner symplektischen Mannigfaltigkeit führen. (Eine 2-Form auf einer Mannigfaltigkeit ungeradzahligter Dimension muß ausgeartet sein!) Damit gingen alle die aus der symplektischen Struktur folgenden rechentechnischen Möglichkeiten verloren, wodurch es als un-zweckmäßig erscheint, um drei Dimensionen zu reduzieren. Wir werden jetzt sehen, daß eine Reduktion um zwei Dimensionen

nützlich sein kann.

(VI.5.) Lemma  $\vec{q} \cdot \vec{L} = \vec{p} \cdot \vec{L} = 0$ .

Beweis Man muß nur einsetzen:  $\vec{q} \cdot \vec{L} = \sum_{i=1}^3 q_i L_i = 0$ . ■

Bemerkung Die Bahnen von H liegen also in einer Ebene senkrecht zu  $\vec{L}$ , sowohl im  $\vec{q}$ -Raum als auch im  $\vec{p}$ -Raum. Da wir gesehen haben, in (VI.2.), daß eine Rotation im  $\vec{q}$ -Raum und die gleiche Rotation im  $\vec{p}$ -Raum ein symplektischer Diffeomorphismus ist, können wir, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, annehmen, daß  $\vec{L}$  in der  $q_3$ - bzw.  $p_3$ -Richtung liegt. Wir bekommen damit Modell III.

(VI.6.) Definition [1; (32.6.)] Modell III für das Kepler Problem ist das Tripel  $(M, \omega, H)$  mit

(i)  $M = T^*(\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\})$  mit der kanonischen symplektischen Form  $\omega$ , und  $L = q_1 p_2 - q_2 p_1 \neq 0$ .

(ii)  $\mu \in \mathbb{R}, \mu > 0$

(iii)  $H \in \mathcal{F}(M)$  definiert durch:  $H(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{|\vec{p}|^2}{2\mu} - \frac{1}{|\vec{q}|}$

$|\cdot|$  ist die euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^2$ .

Bemerkung Wir können Modell III als äquivalentes 2-dimensionales Problem interpretieren.

Um eine weitere Reduktion zu ermöglichen, benutzen wir einen Vektor  $\vec{A}$ , dessen volle Bedeutung erst in Kapitel VII. ersichtlich wird.

(VI.7.) Definition Im Modell III, definieren wir

$$A_i := \frac{q_i}{q} + \frac{1}{\mu} [p_i (\vec{q} \cdot \vec{p}) - q_i |\vec{p}|^2], \quad i=1,2 \quad L := q_1 p_2 - q_2 p_1$$

(VI.8.) Lemma (i)  $\{A_i, H\} = 0, \quad \{L, H\} = 0$

(ii)  $dA_1$  und  $dA_2$  sind fast überall linear unabhängig

$$\begin{aligned} (iii) \quad dA_1 &= \left( \frac{q_2^2}{|\vec{q}|^3} - \frac{p_2^2}{\mu} \right) dq_1 + \left( \frac{-q_1 q_2}{|\vec{q}|^3} - \frac{p_1 p_2}{\mu} \right) dq_2 + \\ &\quad + \left( \frac{q_2 p_2}{\mu} \right) dp_1 + \left( \frac{q_2 p_1 - 2q_1 p_2}{\mu^2} \right) dp_2 \\ dA_2 &= \left( \frac{-q_1 q_2}{|\vec{q}|^3} + \frac{p_1 p_2}{\mu} \right) dq_1 + \left( \frac{q_1^2}{|\vec{q}|^3} - \frac{p_1^2}{\mu} \right) dq_2 + \left( \frac{q_1 p_2 - 2q_2 p_1}{\mu} \right) dp_1 + \\ &\quad + \left( \frac{q_1 p_1}{\mu} \right) dp_2 \end{aligned}$$

Beweis Die Behauptungen folgen direkt aus den jeweiligen Definitionen. ■

(VI.9.) Definition  $\vec{A}_0 := \vec{A}(m)$ , wobei  $m \in M$  die Anfangsbedingung ist.

Bemerkung Wegen (IV.1.) ist also  $\vec{A}^{-1}(\vec{A}_0)$  eine 2-dimensionale

Untermannigfaltigkeit von  $M$ . Wir wollen sehen, ob  $\vec{A}^{-1}(\vec{A}_0)$  auch symplektisch ist. Wegen (IV.2.) müssen wir nur prüfen, ob  $\omega|_{\vec{A}^{-1}(\vec{A}_0)}$  ausgeartet ist.

(VI.10.) Lemma Sei  $X$  ein Vektorfeld auf  $\vec{A}^{-1}(\vec{A}_0)$  mit  $X: (\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (\vec{q}, \vec{p}, x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Dann gilt:

$$x_3 = \gamma_{31}x_1 + \gamma_{32}x_2, \quad x_4 = \gamma_{41}x_1 + \gamma_{42}x_2 \quad \text{mit}$$

$$\gamma_{31} = \frac{\mu}{L} \left( \frac{q_1 q_2}{|\vec{q}|^3} - \frac{p_1 p_2}{2\mu} \right) \quad \gamma_{32} = \frac{\mu}{L} \left( \frac{-q_1^2}{|\vec{q}|^3} + \frac{p_1^2}{2\mu} \right)$$

$$\gamma_{41} = \frac{\mu}{L} \left( \frac{q_2^2}{|\vec{q}|^3} - \frac{p_2^2}{2\mu} \right) \quad \gamma_{42} = \frac{\mu}{L} \left( \frac{-q_1 q_2}{|\vec{q}|^3} + \frac{p_1 p_2}{2\mu} \right)$$

Beweis Da  $X$  ein Vektorfeld auf  $\vec{A}^{-1}(\vec{A}_0)$  ist, liegt es im Kern von  $dA_1$  und  $dA_2$ , (siehe (IV.2.)). Das heißt:

$$dA_1(X) = dA_2(X) = 0. \quad \text{Das Resultat folgt, durch längere}$$

Rechnung daraus unter Verwendung der Formel (VI.8.)(iii). ■

(VI.11.) Lemma  $\omega|_{\vec{A}^{-1}(\vec{A}_0)} = \left( \frac{\mu H}{L} \right) dq_1 \wedge dq_2$ , also nicht ausgeartet, falls  $H \neq 0$ .

Beweis Seien  $X, Y$  Vektorfelder auf  $\vec{A}^{-1}(\vec{A}_0)$ . Es ist dann

$$\begin{aligned} \omega(X, Y) &= x_1 y_3 + x_2 y_4 - x_3 y_1 - x_4 y_2 = \\ &= x_1 (\gamma_{31} y_1 + \gamma_{32} y_2) + x_2 (\gamma_{41} y_1 + \gamma_{42} y_2) - y_1 (\gamma_{31} x_1 + \gamma_{32} x_2) + \\ &\quad - y_2 (\gamma_{41} x_1 + \gamma_{42} x_2) = (-\gamma_{32} x_2 + \gamma_{41} x_2) y_1 + (-\gamma_{41} x_1 + \gamma_{32} x_1) y_2 = \\ &= (\gamma_{41} - \gamma_{32})(x_2 y_1 - x_1 y_2) = \\ &= \left( \frac{\mu H}{L} \right) (x_2 y_1 - x_1 y_2) \Rightarrow \omega|_{\vec{A}^{-1}(\vec{A}_0)} = dq_1 \wedge dq_2 \left( \frac{\mu H}{L} \right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(VI.12.) Definition Modell IV für das Kepler Problem ist das Tripel  $(\vec{A}^{-1}(\vec{A}_0), \omega|_{\vec{A}^{-1}(\vec{A}_0)}, H')$  mit

(i)  $\vec{A}^{-1}(\vec{A}_0)$  ist die symplektische Untermannigfaltigkeit von  $M$  in Modell III (VI.6.) definiert durch (VI.7.) und (VI.9.).

(ii)  $H' \in \mathcal{F}(\vec{A}^{-1}(\vec{A}_0))$ ,  $H' := H|_{\vec{A}^{-1}(\vec{A}_0)}$  mit  $H$  in (VI.6.) angegeben.

$$(VI.13.) \quad \text{Lemma} \quad H' = \frac{-(A^2 - 1)}{2(q_1 A_1 + q_2 A_2 - q)}$$

$$\text{Beweis} \quad q_1 A_1 + q_2 A_2 - q = \frac{1}{\mu} [(\vec{q} \cdot \vec{p})^2 - |\vec{q}|^2 |\vec{p}|^2] = \frac{-L^2}{\mu}$$

$$A^2 - 1 = \frac{2HL^2}{\mu} \Rightarrow H = \frac{\mu(A^2 - 1)}{2L^2} = \frac{-(A^2 - 1)}{2(q_1 A_1 + q_2 A_2 - q)} \quad \blacksquare$$

$$(VI.14.) \quad \text{Definition} \quad \cos \varphi := \frac{q_1 A_1 + q_2 A_2}{qA}, \quad \sin \varphi := \frac{q_2 A_1 - q_1 A_2}{qA}$$

(VI.15.) Satz

$$(i) \quad \dot{\vec{q}} = \left( \frac{L}{\mu q} \right) \begin{pmatrix} -A \sin \varphi \\ 1 - A \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{\mu q^2} \quad (iii) \quad q = \frac{\text{const.}}{1 - A \cos \varphi}$$

Beweis  $\frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{+(A^2-1)(A_2-q_2/q)}{2(q_1 A_1 + q_2 A_2 - q)^2} = \frac{-(A_2-q_2/q)H}{\cancel{2}(q_1 A_1 + q_2 A_2 - q)}$

$$\dot{q}_1 = \{q_1, H\} = \frac{L}{\mu H} \frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{-L}{\mu} \frac{(A_2 - q_2/q)}{(q_1 A_1 + q_2 A_2 - q)}$$

$$\dot{q}_2 = \frac{-L}{\mu H} \frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{+L}{\mu} \frac{(A_1 - q_1/q)}{(q_1 A_1 + q_2 A_2 - q)}$$

$$\dot{q} = \frac{q_1 \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_2}{q} = \left( \frac{L}{\mu q} \right) \left( \frac{-A \sin \varphi}{1 - A \cos \varphi} \right)$$

$$(\sin \varphi) = \cos \varphi \dot{\varphi} = \frac{\dot{q}_1 A_2 - \dot{q}_2 A_1}{q A} - \frac{(q_1 A_2 - q_2 A_1) \dot{q}}{q^2 A} = \left( \frac{L}{\mu q^2} \right) \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L}{\mu q^2}. \quad \frac{dq}{d\varphi} = \frac{\dot{q}}{\dot{\varphi}} = \frac{-q A \sin \varphi}{1 - A \cos \varphi} \Rightarrow \frac{dq}{q} = \frac{+A d(\cos \varphi)}{1 - A \cos \varphi}$$

$$\ln q = -\ln(1 - A \cos \varphi) + \text{const.} \Rightarrow q = \frac{\text{const.}}{1 - A \cos \varphi} \quad \blacksquare$$

Bemerkung Satz (VI.15.) (iii) ist eine Gleichung für die Bahn von H im  $\vec{q}$ -Raum. Die Bahn im ganzen Phasenraum von Modell II folgt aus der Definition von Modell IV und Modell III. Wir werden die Bahnen von H und die Integralkurven von H ausführlicher diskutieren im nächsten Kapitel, wo sie auf einer anderen Weise gewonnen werden.

# VII. Berechnung der Bahnen von H durch einmalige Reduktion

Diesem Kapitel liegt Modell II (VI.1.) zu Grunde. Wir haben schon gesehen, daß der Drehimpulsvektor  $\vec{L}$  eine Konstante der Bewegung ist (VI.2.). Es gibt aber noch einen Vektor, den Runge-Lenz Vektor  $\vec{A}$ , der auch invariant unter der Wirkung von H ist. Wegen  $\vec{L} \cdot \vec{M} = 0$  sind nicht alle sechs Komponenten dieser zwei Vektoren unabhängig. Der Rang der Abbildung  $\mathcal{V}: M \rightarrow \mathbb{R}^6: (\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (\vec{L}, \vec{A})$  ist aber tatsächlich gleich 5, wie man aus (IV.1.) und (VII.4.) sieht. Somit ist es möglich, das 6-dimensionale Problem auf eine Dimension zu reduzieren, ohne eine Differentialgleichung zu lösen. Die Bahnen von H werden also auf rein algebraischer Weise gewonnen. Ein weiterer Schritt liefert dann die Integralkurven von H, also die zeitliche Abhängigkeit.

(VII.1.) Definition (i)  $\vec{A} := \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} - \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{\mu}$ .  
 $\vec{A}$  heißt Runge-Lenz Vektor [2,3,6].

(ii) Für  $H \neq 0$ :  $\vec{M} := \sqrt{\frac{\mu}{2|H|}} \vec{A}$ .  
 (VII.2.) Folgerung  $A_i = \frac{q_i}{|\vec{q}|} + \frac{p_i(\vec{q} \cdot \vec{p}) - q_i |\vec{p}|^2}{\mu}$

$$A^2 = 1 + \frac{2H}{\mu L^2}$$

$$\vec{L} \cdot \vec{A} = \vec{L} \cdot \vec{M} = 0$$

$$M^2 + L^2 = \frac{\mu}{2H} \quad \text{für } H < 0$$

$$M^2 - L^2 = \frac{\mu}{2H} \quad \text{für } H > 0$$

$$\{H, L_i\} = \{H, A_i\} = \{H, M_i\} = 0.$$

Beweis Die Behauptungen folgen direkt aus den jeweiligen Definitionen.

(VII.3.) Definition (i)  $\Theta := \arccos \frac{\vec{q} \cdot \vec{A}}{|\vec{q}| \cdot |\vec{A}|}$  mit

$$(ii) \quad \vec{q} \cdot \vec{p} = -(|\vec{q}|^2 |\vec{p}|^2 - L^2)^{1/2}$$

$$(iii) \quad q_{||} := \frac{\vec{q} \cdot \vec{A}}{|\vec{A}|}$$

$$(iv) \quad q_{\perp} := \frac{\vec{q} \cdot (\vec{L} \times \vec{A})}{|\vec{L}| \cdot |\vec{A}|}$$

$$(v) \quad p_{||} := \frac{\vec{p} \cdot \vec{A}}{|\vec{A}|}$$

$$(vi) \quad p_{\perp} := \frac{\vec{p} \cdot (\vec{L} \times \vec{A})}{|\vec{L}| \cdot |\vec{A}|}$$

Bemerkung  $\Theta$  ist der Winkel zwischen  $\vec{q}$  und  $\vec{A}$  im Konfigurationsraum. Wegen  $L^2 = \vec{L} \cdot \vec{L} = (\vec{q} \times \vec{p}) \cdot (\vec{q} \times \vec{p}) = |\vec{q}|^2 |\vec{p}|^2 - (\vec{q} \cdot \vec{p})^2$  ist der Winkel zwischen  $\vec{p}$  und  $\vec{A}$  bis auf ein Vorzeichen bestimmt. Das Vorzeichen wird in (ii) festgelegt. Wegen  $\vec{L} \cdot \vec{A} = 0$  haben wir eine orthonormale Basis:  $\frac{\vec{L}}{|\vec{L}|}, \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}, \frac{\vec{L} \times \vec{A}}{|\vec{L}| \cdot |\vec{A}|}$  und wegen  $\vec{q} \cdot \vec{L} = \vec{p} \cdot \vec{L} = 0$  ist  $\vec{q} = (0) \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|} + (q_{||}) \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} + (q_{\perp}) \frac{\vec{L} \times \vec{A}}{|\vec{L}| \cdot |\vec{A}|}$ .



$$(VII.4.) \text{ Satz (i)} \quad |\vec{q}| = \frac{L^2}{\mu(1-A\cos\theta)}$$

$$(ii) \quad \vec{q} \cdot \vec{p} = \frac{-LA\sin\theta}{(1-A\cos\theta)}$$

$$(iii) \quad q_{||} = \frac{+L^2}{\mu} \frac{\cos\theta}{(1-A\cos\theta)}$$

$$(iv) \quad q_{\perp} = \frac{+L^2}{\mu} \frac{\sin\theta}{(1-A\cos\theta)}$$

$$(v) \quad p_{||} = \frac{-\mu}{L} \sin\theta$$

$$(vi) \quad p_{\perp} = \frac{-\mu}{L} (A - \cos\theta)$$

Beweis Die Herleitung besteht aus einer direkten Berechnung aus den Definitionen. Als Beispiel berechnen wir  $|\vec{q}|$ .

$$\vec{q} \cdot \vec{A} = |\vec{q}| - \left( \frac{1}{\mu} \vec{q} \cdot (\vec{p} \times \vec{L}) \right) = |\vec{q}| - \frac{1}{\mu} \vec{L} \cdot (\vec{q} \times \vec{p}) = |\vec{q}| - \frac{L^2}{\mu} \Rightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{1}{A} - \frac{L^2}{\mu A |\vec{q}|} \Rightarrow 1 - A\cos\theta = \frac{L^2}{\mu |\vec{q}|} \Rightarrow |\vec{q}| = \frac{L^2}{\mu(1-A\cos\theta)}.$$

Bemerkung Aus den Poisson-Klammer Beziehungen in (VII.2.) folgt, daß  $L_i$  und  $A_i$  bzw.  $L_i$  und  $M_i$  für  $H = 0$  bzw.  $H \neq 0$  Konstanten der Bewegung sind. Damit haben wir  $\vec{q}$  und  $\vec{p}$  in (VII.4.) durch einen Parameter  $\theta$  angegeben, und somit eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit gefunden, die die Bahn von  $H$  enthalten muß, und somit mit ihr identisch ist. Die Bahn ist also gleich  $(\vec{L}, \vec{A})^{-1}(\vec{L}_0, \vec{A}_0)$  nach (IV.1.). Aus den Bahngleichungen in (VII.4.) sehen wir dann, daß die Bahnen, projiziert auf den Konfigurationsraum ( $\vec{q}$ -Raum), Ellipsen (bzw. Parabeln bzw. Hyperbeln) sind für  $H < 0$  (bzw.  $H = 0$  bzw.  $H > 0$ ). Im  $\vec{p}$ -Raum sind die Bahnen Kreise (bzw. Kreisbögen) für  $H < 0$  (bzw.  $H \geq 0$ ). So erkennen wir auch die geometrische Bedeutung des Runge-Lenz Vektors  $\vec{A}$ :  $\vec{A}$  zeigt in die Richtung des Aphels und hat eine Länge gleich der numerischen Exzentrizität.

Um die Integralkurven von  $H$  anzugeben, müssen wir die richtige Parametrisierung finden. Das heißt, wir müssen den Winkel  $\theta$  als Funktion der Zeit  $t$  ausdrücken.

Die Herleitung von (VII.4.) hängt nicht von der Konstanz von  $\vec{L}$  und  $\vec{A}$  ab. Die angegebenen Formeln für  $\vec{q}$  und  $\vec{p}$  sind also immer noch richtig, wenn  $\vec{L}$  und  $\vec{A}$  nicht konstant sind, wie z.B. entlang der Bahnen von  $M_1$ , die wir im nächsten Kapitel untersuchen werden.

(VII.5.) Lemma Sei  $c: \mathbb{R} \rightarrow M: t \mapsto (\vec{q}, \vec{p})$  eine Integralkurve von  $H$  und  $\theta$  wie in (VII.3.) definiert. Dann gelten:

$$(i) \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{+\mu}{L^3} (1-A\cos\theta)^2$$

$$(ii) \quad t = \frac{+L^3}{\mu} \int \frac{d\theta}{(1-A\cos\theta)^2}.$$

Beweis Für  $q_{||}$  haben wir die Hamilton-Gleichung:

$$\frac{dq_{||}}{dt} = \{q_{||}, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_{||}} = \frac{p_{||}}{\mu} \Rightarrow \frac{dq_{||}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{p_{||}}{\mu}(\theta(t)) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{L^2}{\mu}\right) \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\cos \theta}{1 - A \cos \theta} \right) \left( \frac{d\theta}{dt} \right) = \left( \frac{-1}{L} \right) \sin \theta$$

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\cos \theta}{1 - A \cos \theta} \right) = \frac{-\sin \theta}{(1 - A \cos \theta)^2} \Rightarrow \left( \frac{L^2}{\mu} \right) \left( \frac{-\sin \theta}{(1 - A \cos \theta)^2} \right) \left( \frac{d\theta}{dt} \right) = \left( \frac{-1}{L} \right) \sin \theta \Rightarrow$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu}{L^2} (1 - A \cos \theta)^2.$$

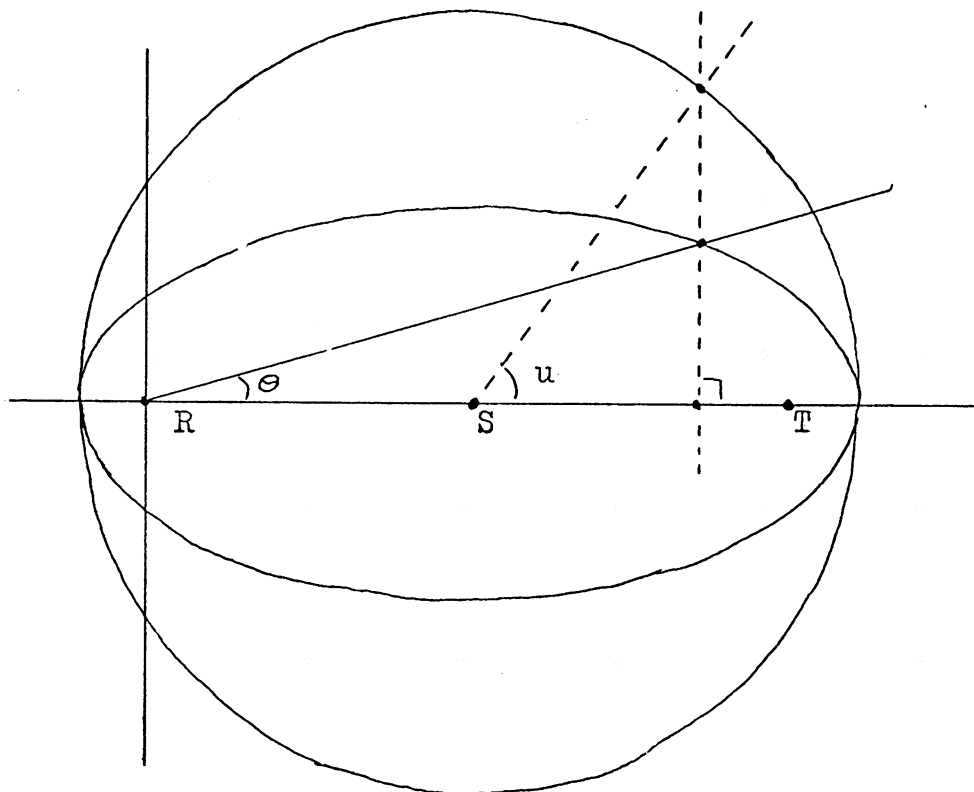
Bemerkung (VII.5.)(ii) kann man jetzt direkt integrieren (siehe Ryshik und Gradstein [13] Seite 105, 106), aber wir verzichten darauf, weil die Ergebnisse recht unüberschaubar sind. Stattdessen definieren wir einen anderen Winkel.

(VII.6.) Definition

$$\sin u := \frac{\sqrt{1 - A^2} \sin \theta}{1 - A \cos \theta}$$

$$\cos u := \frac{-A + \cos \theta}{1 - A \cos \theta}$$

Bemerkung  $u$  heißt exzentrische Anomalie und ist der Winkel zwischen  $\vec{A}$  und dem Schnittpunkt der Ordinate von  $\vec{q}$  mit einem um die Ellipse gezeichneten Kreis:



R und T sind die Brennpunkte  
S ist der Mittelpunkt

$$(VII.7.) \text{ Lemma} \quad \cos \theta = \frac{A + \cos u}{1 + A \cos u} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{1-A^2} \sin u}{1 + A \cos u}$$

$$1 - A \cos \theta = \frac{(1-A^2)}{1 + A \cos u}$$

Beweis Es folgt direkt aus (VII.6.).

(VII.8.) Satz Sei  $c: \mathbb{R} \rightarrow M: t \mapsto (\tilde{q}, \tilde{p})$  eine Integralkurve von  $H$  und  $u$  wie in (VII.6.) definiert, mit  $u=0$  für  $t=0$ . Dann gilt:

$$t = \frac{+L^3}{(1-A^2)^{3/2}} (u + A \sin u)$$

Beweis

$$\cos \theta = \frac{A + \cos u}{1 + A \cos u} \Rightarrow (*) \quad \frac{d(\cos \theta)}{dt} = \frac{-(1-A^2) \sin u \dot{u}}{(1 + A \cos u)^2}$$

$$\frac{d(\cos \theta)}{dt} = -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d(\cos \theta)}{dt} = \frac{-\mu}{L^3} \sin \theta (1 - A \cos \theta)^2 =$$

$$= \frac{-\mu}{L^3} \left( \frac{\sqrt{1-A^2} \sin u}{1 + A \cos u} \right) \left( \frac{1-A^2}{1 + A \cos u} \right)^2 \Rightarrow$$

$$(**) \quad \frac{d(\cos \theta)}{dt} = \frac{-\mu}{L^3} \frac{(1-A^2)^{5/2} \sin u}{(1 + A \cos u)^3}$$

$$(*) = (**) \Rightarrow$$

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = \frac{+\mu}{L^3} \frac{(1-A^2)^{3/2}}{1 + A \cos u} \Rightarrow dt = \frac{+L^3}{\mu(1-A^2)^{3/2}} (1 + A \cos u) du =$$

$$= \frac{+L^3}{\mu(1-A^2)^{3/2}} d(u + A \sin u) \Rightarrow t = \frac{+L^3}{\mu(1-A^2)^{3/2}} (u + A \sin u).$$

### VIII. Diskussion der Symmetrie und der Bahnen von $\vec{M}$

Im letzten Kapitel sahen wir, das es zwei Vektoren gibt,  $\vec{L}$  und  $\vec{A}$ , die Konstanten der Bewegung sind. Erhaltung von  $\vec{L}$  hängt bekanntlich mit Rotationssymmetrie zusammen (siehe (VI.2.)). Die sechs Komponenten von  $\vec{L}$  und  $\vec{A}$  bzw.  $\vec{L}$  und  $\vec{M}$  für  $H = 0$  bzw.  $H \neq 0$  bilden eine abgeschlossene Lie-Algebra. Jetzt taucht die Frage auf: Gibt es eine dazugehörige globale, Hamiltonsche Wirkung einer Gruppe? Und, wenn ja, wie sieht die Wirkung aus, die mit der Erhaltung von  $\vec{A}$  bzw.  $\vec{M}$  zusammenhängt? Dazu suchen wir die Integralkurven von  $A_1$  und  $M_1$ .

Die Differentialgleichungen sind kompliziert, und eine unmittelbare Lösung wurde nicht gefunden. Deshalb versuchen wir, Symmetrie auszunutzen. Einige Funktionen von  $\vec{L}$  und  $\vec{M}$ , die entlang der Integralkurven von  $M_1$  konstant sind, lassen sich leicht angeben (VIII.5.). Davon sind aber nur vier unabhängig. Gäbe es fünf unabhängige Funktionen von  $\vec{L}$  und  $\vec{M}$ , die konstant wären, so wären wegen  $\vec{L} \cdot \vec{M} = 0$  alle sechs Komponenten von  $\vec{L}$  und  $\vec{M}$  konstant. Das ist aber nicht der Fall, wegen  $\{M_1, M_2\} = M_3 \neq 0$ . Andere Konstanten wurden nicht gefunden. Deshalb war es nicht möglich, das Problem, wie im letzten Kapitel, durch Reduktion allein zu lösen. Eine Reduktion auf eine kleinere Dimension wie in (VIII.2.) scheint das Problem nur komplizierter zu machen.

Es ist aber möglich, (siehe (VIII.6.)), alle Komponenten von  $\vec{L}$  und  $\vec{M}$  als Funktion des Integralkurvenparameters  $s$  auszudrücken. Wegen (VII.4.) ist es dann möglich, die Integralkurven von  $M_1$  als Funktion von  $\theta$  und  $s$  auszudrücken. Die Abhängigkeit  $\theta(s)$  ist hier nicht bekannt, aber das Problem ist jetzt auf eine einzige, gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung reduziert (VIII.8.). Somit wurde die Existenz, für alle  $H$ , der Integralkurven von  $A_1$  bewiesen (VIII.9.). Weil die Integralkurven als Funktion von  $s$  und angegeben sind, aber  $\theta(s)$  unbekannt ist, ist es hier auch nicht möglich, sie Bahnen anzugeben.

(VIII.1.) Satz Für alle  $H$ :

$$\begin{aligned} \{q_1, A_1\} &= (1/\mu)(q_2 p_2 + q_3 p_3) \\ \{q_2, A_1\} &= (1/\mu)(q_2 p_1 - 2q_1 p_2) \\ \{q_3, A_1\} &= (1/\mu)(q_3 p_1 - 2q_1 p_3) \end{aligned}$$

$$\{p_1, A_1\} = (1/|q|^3)(-q_2^2 - q_3^2) + (1/\mu)(p_2^2 + p_3^2)$$

$$\{p_2, A_1\} = (1/|q|^3)(q_1 q_2) + (1/\mu)(-p_1 p_2)$$

$$\{p_3, A_1\} = (1/|q|^3)(q_1 q_3) + (1/\mu)(-p_1 p_3)$$

(ii) Für  $H \neq 0$ :

$$\{q_1, M_1\} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} |H|^{-3/2} \left( \frac{A_1 p_1}{2} - H(1/\mu)(q_2 p_2 + q_3 p_3) \right)$$

$$\{q_2, M_1\} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} |H|^{-3/2} \left( \frac{A_1 p_2}{2} - H(1/\mu)(q_2 p_1 - 2q_1 p_2) \right)$$

$$\{q_3, M_1\} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} |H|^{-3/2} \left( \frac{A_1 p_3}{2} - H(1/\mu)(q_3 p_1 - 2q_1 p_3) \right)$$

$$\{p_1, M_1\} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} |H|^{-3/2} \left[ \frac{A_1}{2} \left( \frac{-q_1}{|q|^3} \right) - H \left( \frac{-q_2^2 - q_3^2}{|q|^3} + \frac{1}{\mu}(p_2^2 + p_3^2) \right) \right]$$

$$\{p_2, M_1\} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} |H|^{-3/2} \left[ \frac{A_1}{2} \left( \frac{-q_2}{|q|^3} \right) - H \left( \frac{q_1 q_2}{|q|^3} + \frac{1}{\mu}(-p_1 p_2) \right) \right]$$

$$\{p_3, M_1\} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} |H|^{-3/2} \left[ \frac{A_1}{2} \left( \frac{-q_3}{|q|^3} \right) - H \left( \frac{q_1 q_3}{|q|^3} + \frac{1}{\mu}(-p_1 p_3) \right) \right]$$

mit + Zeichen für  $H < 0$  und - Zeichen für  $H > 0$ .

Beweis Für  $H < 0$ :

$$\{x_j, M_1\} = \{x_j, \sqrt{\frac{\mu}{2}}(-H)^{-1/2} A_1\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{2}} A_1 (-1/2)(-H)^{-3/2} (-1) \{x_j, H\} + \sqrt{\frac{\mu}{2}}(-H)^{-1/2} \{x_j, A_1\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{2}}(-H)^{-3/2} \left( \frac{A_1}{2} \{x_j, H\} - H \{x_j, A_1\} \right), \text{ und ähnlich für } H > 0.$$

Einsetzen von  $\{x_j, H\}$  und  $\{x_j, A_1\}$  aus (II.14) gibt das Ergebnis. ■

Bemerkung Wegen der Eigenschaften der Poisson-Klammer ist

$$q_i' = (dq_i/ds) = \{q_i, M_1\} = L_{X_{M_1}} q_i \text{ (siehe (II.16.) und (II.8.)).}$$

Wir haben also hier die Differentialgleichungen für eine Integralkurve von  $M_1$  und von  $A_1$ .

(VIII.2.) Lemma Für  $H \neq 0$  werden die Integralkurven  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ :  $s \mapsto (\bar{q}, \bar{p})$  von  $M_1$  durch die drei folgenden Differentialgleichungen bestimmt:

$$q_1' = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} |H|^{-3/2} \left[ \frac{p_1}{\mu} \left( \frac{A_1}{2} + H q_1 \right) - \frac{H}{p_1} \left( \frac{q_1}{|q|} + A_1 + 2H q_1 \right) \right]$$

$$p_1' = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} |H|^{-3/2} \left[ \left( \frac{1}{|q|} \right)^3 \left( \frac{-A_1 q_1}{2} - H q_1^2 \right) - H \left( \frac{1}{|q|} + 2H \frac{-p_1^2}{\mu} \right) \right]$$

$$\left( \frac{1}{|q|} \right)' = \mp \sqrt{\frac{\mu}{2}} |H|^{-3/2} \left( \frac{1}{|q|} \right)^3 \left[ \left( \frac{A_1}{2} + H q_1 \right) \left( \frac{1}{p_1} \right) \left( \frac{q_1}{|q|} + A_1 + 2H q_1 \right) + \left( \frac{-H p_1}{\mu |q|^{-2}} \right) \right]$$

Beweis Man kann sechs neue Koordinaten einführen:  $q_1, p_1, (1/|q|), L_1, H$  und  $A_1$ . Diese sechs Funktionen sind unabhängig, und drei davon sind konstant, nämlich  $L_1, H$  und  $A_1$ . Wir müssen also die Differentialgleichungen für  $q_1, p_1$  und  $(1/|q|)$  finden, und als Funktion von den sechs neuen Koordinaten angeben. Das folgt, etwas länglich, aber direkt aus den Definitionen für  $L_1, H$  und  $A_1$ , und aus (VIII.1.). ■

Bemerkung Dieses Lemma dient nur als Beispiel, und wird im Folgenden nicht benutzt.

(VIII.3.) Satz Seien  $H, A_i, M_i$  wie in (VI.1.) und (VII.1.) definiert. Dann gelten:

(i) Für alle  $H$  und  $(i,j,k) = \text{zyklische Permutation von } (1,2,3)$

$$\begin{aligned} \{H, L_i\} &= 0 & \{L_i, L_j\} &= L_k \\ \{H, A_i\} &= 0 & \{L_i, A_j\} &= A_k \\ \{L_i, A_j\} &= 0 & \{A_i, A_j\} &= (-2H/\mu)L_k \end{aligned}$$

(ii) Für  $H < 0$ :

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= L_k \\ \left\{ \left( \frac{L+M}{2} \right)_i, \left( \frac{L-M}{2} \right)_j \right\} &= \left( \frac{L+M}{2} \right)_k \\ \left\{ \left( \frac{L+M}{2} \right)_i, \left( \frac{L-M}{2} \right)_j \right\} &= 0 \end{aligned}$$

(iii) Für  $H > 0$ :

$$\{M_i, M_j\} = -L_k$$

(iv) Für  $H = 0$ :

$$\{A_i, A_j\} = 0$$

Beweis Es folgt direkt aus den Definitionen. ■

(VIII.4.) Folgerung Für  $H \neq 0$  bzw.  $H = 0$  bilden  $\vec{L}$  und  $\vec{M}$  bzw.  $\vec{L}$  und  $\vec{A}$  die folgenden Lie-Algebren:

(i) für  $H < 0$ : Lie-Algebra von  $O(4)$  und  $SU(2) \times SU(2)$

(ii) für  $H > 0$ : Lie-Algebra von  $O(3,1)$

(iii) für  $H = 0$ : Lie-Algebra von  $IO(3) = \mathbb{R}^3 \otimes O(3) = \text{euklidische Gruppe in drei Dimensionen.}$

(VIII.5.) Satz Für  $H \neq 0$  bzw.  $H = 0$ , sei  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Integralkurve von  $M_1$  bzw.  $A_1$ . Dann sind die folgenden Funktionen konstant entlang  $c$ .

(i) Für alle  $H$ :

$$L_1, A_1, H, L_2 M_2 + L_3 M_3$$

(ii) Für  $H < 0$ :

$$L_2^2 + M_3^2, L_3^2 + M_2^2, M_2 M_3 - L_2 L_3$$

(iii) Für  $H > 0$ :

$$L_2^2 - M_3^2, L_3^2 - M_2^2, M_2 M_3 + L_2 L_3$$

(iv) Für  $H = 0$ :

$$A_1, A_2, A_3, L_1, H.$$

Beweis Wegen (I.27.) und (II.8.) müssen nur die Poisson-Klammer ausgerechnet werden, z.B. im Fall (ii):

$$\{M_2 M_3 - L_2 L_3, M_1\} = M_2 \{M_3, M_1\} + M_3 \{M_2, M_1\} - L_2 \{L_3, M_1\} + L_3 \{L_2, M_1\} = M_2(L_2) + M_3(-L_3) - L_2(M_2) - L_3(-M_3) = 0. \blacksquare$$

(VIII.6.) Satz Für  $H \neq 0$  bzw.  $H = 0$  sei  $c: \mathbb{R} \rightarrow M: s \mapsto (\vec{q}, \vec{p})$  eine Integralkurve von  $M_1$  bzw.  $A_1$ . Dann gelten:

$$(i) \text{ Für } H < 0: \quad L_2 = +C_1 \cos(s - \alpha_1)$$

$$L_3 = +C_2 \cos(s - \alpha_2)$$

$$M_2 = -C_2 \sin(s - \alpha_2)$$

$$M_3 = +C_1 \sin(s - \alpha_1)$$

$$(L \times M)_1 = (C_1^2/2) \sin 2(s - \alpha_1) - (C_2^2/2) \sin 2(s - \alpha_2)$$

$$(ii) \text{ Für } H > 0: \quad L_2 = +C_3 \cosh(s - \alpha_3)$$

$$L_3 = +C_4 \cosh(s - \alpha_4)$$

$$M_2 = +C_4 \sinh(s - \alpha_4)$$

$$M_3 = -C_3 \sinh(s - \alpha_3)$$

$$(L \times M)_1 = (-C_3^2/2) \sinh 2(s - \alpha_3) + (C_4^2/2) \sinh 2(s - \alpha_4)$$

$$(iii) \text{ Für } H = 0: \quad L_2 = -A_3 s + C_5$$

$$L_3 = +A_2 s + C_6$$

$$(L \times A)_1 = -(A_2^2 + A_3^2)s - A_2 C_6 + A_3 C_5$$

wobei  $C_1, \dots, C_6, \alpha_1, \dots, \alpha_4 \in \mathbb{R}$  die Integrationskonstanten sind.

Beweis (i) Wegen (II.8.) haben wir  $\frac{dL_2}{ds} = L_{X_{M_1}} L_2 = \{L_2, M_1\} = -M_3$ , also

$$L_2' = -M_3 \text{ und } M_3' = +L_2 \Rightarrow L_2 + iM_3 = C_1 e^{i(s - \alpha_1)} \Rightarrow$$

$$L_2 = C_1 \cos(s - \alpha_1), M_3 = C_1 \sin(s - \alpha_1).$$

(ii) Hier bekommen wir:  $L_2' = -M_3$  und  $M_3' = -L_2 \Rightarrow$

$$L_2 + M_3 = C_3 e^{-(s - \alpha_3)}, L_2 - M_3 = C_3 e^{+(s - \alpha_3)}.$$

(iii) Wegen  $A_3' = \{A_3, A_1\} = 0$  ist  $A_3$  konstant.  $L_2' = \{L_2, A_1\} = -A_3 \Rightarrow L_2 = -A_3 s + C_5.$   $\blacksquare$

(VIII.7.) Lemma Die Voraussetzungen seien wie in (VIII.6.)

Dann gelten:

$$(i) \text{ Für } H < 0: \quad \frac{dM}{ds} = \frac{-(M_2 L_3 - M_3 L_2)}{M} = \frac{+(\vec{L} \times \vec{M})_1}{M}$$

$$\frac{dL}{ds} = \frac{+(M_2 L_3 - M_3 L_2)}{L} = \frac{-(\vec{L} \times \vec{M})_1}{L}$$

$$(ii) \text{ Für } H > 0: \quad \frac{dM}{ds} = \frac{-(\vec{L} \times \vec{M})_1}{M}, \quad \frac{dL}{ds} = \frac{-(\vec{L} \times \vec{M})_1}{L}$$

(iii) Für  $H = 0$ :  $\frac{dL}{ds} = \frac{-(\vec{L} \times \vec{A})_1}{L}$

Beweis Es ist z.B. für  $H < 0$ :  $\frac{dM}{ds} = \frac{1}{2M} \frac{dM^2}{ds} = \frac{1}{2M} \{M^2, M_1\} =$   
 $= (1/2M) (\{M_1^2, M_1\} + \{M_2^2, M_1\} + \{M_3^2, M_1\}) =$   
 $= (1/2M) (2M_2 \{M_2, M_1\} + 2M_3 \{M_3, M_1\}) = (1/M) (-M_2 L_3 + M_3 L_2) \cdot \blacksquare$   
(VIII.8.) Satz Für  $H \neq 0$  bzw.  $H = 0$  sei  $c: \mathbb{R} \rightarrow M: s \mapsto (\vec{q}, \vec{p})$   
eine Integralkurve von  $M_1$  bzw.  $A_1$  und  $\Theta$  wie in (VII.3.) de-  
finiert. Dann gelten:

(i) Für  $H \neq 0$ :

$$\frac{d\Theta}{ds} = \left[ \frac{-\mu^2 M_1}{4H|H| M^2 L^3} \right] + \cos\Theta \left[ + \sqrt{\frac{\mu}{2|H|}} \frac{\mu M_1}{HML^3} \right] + \cos^2\Theta \left[ \frac{-\mu M_1}{2HL^3} \right] +$$

$$+ \sin\Theta \left[ -\sqrt{\frac{\mu}{2|H|}} \frac{2(\vec{L} \times \vec{M})_1}{ML^2} \right] + \sin\Theta \cos\Theta \left[ \frac{+(\vec{L} \times \vec{M})_1}{L^2} \right].$$

(ii) Für  $H = 0$ :

$$\frac{d\Theta}{ds} = (A_1/L)(1-\cos\Theta)^2 + (1/L^2)(\vec{L} \times \vec{A})_1 \sin\Theta(2-\cos\Theta).$$

Beweis Wegen (VII.4.) können wir  $\vec{q}$  und  $\vec{p}$  als Funktion von  $\vec{M}$ ,  $\vec{L}$  und  $\Theta$  ausdrücken. Wegen (VIII.6.) lassen sich  $\vec{M}$  und  $\vec{L}$  als Funktion von  $s$  ausdrücken. Die Differentialgleichung für  $\Theta(s)$  folgt dann aus (VIII.1.). Der Beweis ist völlig analog zu dem von (VII.5.). Wir benutzen hierzu die Gleichung für  $p_{||}$ , weil sie die einfachste ist. Wir skizzieren hier den Beweis für  $H \neq 0$ :

$$\frac{dp_{||}}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{-\mu}{L} \sin\Theta \right) = \frac{+\mu}{L^2} \frac{dL}{ds} \sin\Theta - \frac{\mu}{L} \cos\Theta \frac{d\Theta}{ds}.$$

Mit (VIII.7.) haben wir dann:

$$(*) \quad \frac{dp_{||}}{ds} = (-\mu/L^3)(\vec{L} \times \vec{M})_1 \sin\Theta - (\mu/L) \cos\Theta \frac{d\Theta}{ds}.$$

$$\text{Andererseits ist } \frac{dp_{||}}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{M}}{M} \right) = \frac{d\vec{p}}{ds} \cdot \frac{\vec{M}}{M} + \frac{\vec{p}}{M} \cdot \frac{d\vec{M}}{ds} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{M}}{M^2} \frac{dM}{ds}.$$

Es ist  $\frac{\vec{p}}{M} \cdot \frac{d\vec{M}}{ds} = \frac{\vec{p}}{M} \cdot \{\vec{M}, M_1\} = (1/M) (\vec{p} \times \vec{L})_1 = \pm (A_1 - \frac{q_1}{|q|}) \left( \frac{\mu}{M} \right)$   
mit dem oberen Vorzeichen für  $H < 0$  und dem unteren für  $H > 0$ .

$$\Rightarrow \frac{dp_{||}}{ds} = \frac{d\vec{p}}{ds} \cdot \frac{\vec{M}}{M} \pm \left( A_1 - \frac{q_1}{|q|} \right) \left( \frac{\mu}{M} \right) \mp \frac{p_{||}}{M^2} (\vec{L} \times \vec{M})_1. \text{ Aus (VIII.1.) folgt:}$$

$$\frac{d\vec{p}}{ds} \cdot \frac{\vec{M}}{M} = \frac{q_{||} M_1}{2H|q|^3} + \sqrt{\frac{\mu}{2|H|}} \left( \frac{-M_1}{M|q|} + \frac{q_1 q_{||}}{|q|^3} + \frac{|p|^2 M_1}{\mu M} - \frac{p_1 p_{||}}{\mu} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{dp_{||}}{ds} = \mp \frac{p_{||}}{M^2} (\vec{L} \times \vec{M})_1 \mp \frac{\mu q_1}{M|q|} + \frac{q_{||} M_1}{2H|q|^3} + \sqrt{\frac{\mu}{2|H|}} \left( \frac{+M_1}{M|q|} + \frac{q_1 q_{||}}{|q|^3} - \frac{p_1 p_{||}}{\mu} \right)$$

Jetzt benutzen wir (VII.4.) und (VII.2.) und den Ausdruck



$q_1 = q_{||}(1/M)M_1 + q_{\perp}(1/LM)(\vec{L} \times \vec{M})_1$ , und erhalten:

$$\begin{aligned}
 (**) \quad \frac{dp_{||}}{ds} = & \cos \theta \left[ \mp \frac{\mu^3 M_1}{4H^2 M^2 L^4} \right] + \cos^2 \theta \left[ -\sqrt{\frac{\mu}{2|H|}} \frac{\mu^2 M_1}{HML^4} \right] + \\
 & + \cos^3 \theta \left[ \frac{+\mu^2 M_1}{2HL^4} \right] + \sin \theta \cos \theta \left[ \sqrt{\frac{\mu}{2|H|}} \frac{2\mu(\vec{L} \times \vec{M})_1}{L^3 M} \right] + \\
 & + \sin \theta \cos^2 \theta \left[ \frac{-\mu(\vec{L} \times \vec{M})_1}{L^3} \right] + \sin \theta \left[ \frac{-\mu(\vec{L} \times \vec{M})_1}{L^3} \right].
 \end{aligned}$$

Der Vergleich zwischen (\*) und (\*\*) liefert das Ergebnis. ■

(VIII.9.) Satz Für  $H \neq 0$  bzw.  $H = 0$  sei  $L_1 \neq 0 \neq M_1$  bzw.  $L_1 \neq 0$ . Dann gelten:

- (i) Für alle  $s_0, \theta_0 \in \mathbb{R}$  existiert eine Integralkurve von (VIII.8.)(i) und (VIII.8.)(ii) mit  $\Theta(s_0) = \theta_0$ .
- (ii) Für  $H \neq 0$  bzw.  $H = 0$  existieren globale Integralkurven von  $M_1$  bzw.  $A_1$ .

Beweis (i) Mit Hilfe von (VIII.6.) sieht man, daß die Funktionen in (VIII.8.) überall stetig und beschränkt sind.

Daher gilt der Existenzsatz von Peano (siehe Kamke [8] Seite 126).

- (ii) In (VII.4.) wurden  $\vec{q}$  und  $\vec{p}$  als Funktion von  $\vec{L}, \vec{M}$  und  $\Theta$  angegeben. In (VIII.6.) wurden  $\vec{L}$  und  $\vec{M}$  als Funktion von  $s$  angegeben. Wegen (VIII.8.) und (VIII.9.)(i) existiert die benötigte Funktion  $\Theta(s)$ . Damit haben wir  $\vec{q}$  und  $\vec{p}$  als Funktion des Integralkurvenparameters  $s$ . ■

# IX. Stereographische Projektion und globale $SO(4)$ bzw. $SO(3,1)$ Symmetrie

Im quantenmechanischen Fall ist es möglich, durch Anwendung einer stereographischen Projektion im Impulsraum, im Hilbertraum des H-Atoms eine unitäre Darstellung der Gruppe  $SO(4)$  als Symmetriegruppe zu konstruieren (siehe Bander und Itzykson [3]). Die Methode geht auf Fock zurück. In seiner Diskussion zur Kompaktifizierung des Phasenraums des Kepler-Problems, gibt Moser [10] ein klassisch mechanisches Analogon dieser Projektion an. Er bildet die Hyperfläche konstanter Energie des Phasenraums auf ein Unterbündel des Tangentialbündels der Sphäre  $S^3$  ab. Eingeschränkt auf den Impulsraum ist diese Abbildung wieder eine stereographische Projektion. Der Bildraum besitzt also eine besondere Symmetrieeigenschaft. Das nutzen wir aus, indem wir, für  $H < 0$  bzw.  $H > 0$ , die Energiefläche auf ein Unterbündel des Tangentialbündels einer Sphäre bzw. eines Hyperboloids abbilden. Dadurch wird es möglich, die Differentialgleichungen für die Integralkurven von  $M_1$  für  $H \neq 0$  zu lösen. Die entsprechende Lösung für  $H = 0$  wurde bis jetzt nicht gefunden.

(IX.1.) Definition (i) Für  $H = H_0 < 0$ :

$$\xi_0 = \frac{|p|^2 + 2H_0\mu}{|p|^2 - 2H_0\mu}$$

$$\xi_k = \frac{-2\sqrt{-2H_0\mu}p_k}{|p|^2 - 2H_0\mu}$$

$$\eta_0 = \frac{-\sqrt{-2H_0}}{\sqrt{\mu}}(\vec{q} \cdot \vec{p})$$

$$\eta_k = \left( \frac{|p|^2 - 2H_0\mu}{2\mu} \right) q_k - \frac{(\vec{q} \cdot \vec{p})}{\mu} p_k$$

(ii) Für  $H = H_0 > 0$ :

$$\xi_0 = \frac{|p|^2 + 2H_0\mu}{|p|^2 - 2H_0\mu}$$

$$\xi_k = \frac{-2\sqrt{2H_0\mu}p_k}{|p|^2 - 2H_0\mu}$$

$$\chi_0 = \frac{-\sqrt{2H_0}}{\sqrt{\mu}}(\vec{q} \cdot \vec{p})$$

$$\chi_k = -\left(\frac{|p|^2 - 2H_0\mu}{2\mu}\right)q_k + \frac{(\vec{q} \cdot \vec{p})}{\mu}p_k$$

Bemerkung Für  $H = H_0 > 0$  haben wir  $|p|^2 - 2H_0\mu = 2\mu/|q| > 0$ . Deshalb ist  $\xi_0 \geq 1$  und die Transformation ist auf das obere Stück des Hyperboloids.

(IX.2.) Folgerung (i) Für  $H = H_0 < 0$ :

$$p_k = -\sqrt{-2H_0\mu}\left(\frac{\xi_k}{1-\xi_0}\right)$$

$$q_k = (1/-2H_0)(\chi_k(1-\xi_0) + \xi_k\chi_0)$$

(ii) Für  $H = H_0 > 0$ :

$$p_k = +\sqrt{2H_0\mu}\left(\frac{\xi_k}{1-\xi_0}\right)$$

$$q_k = (1/2H_0)(\chi_k(1-\xi_0) + \xi_k\chi_0)$$

(IX.3.) Folgerung (i) Für  $H = H_0 < 0$ :

$$|p|^2 = (-2H_0\mu)\left(\frac{1 + \xi_0}{1 - \xi_0}\right)$$

$$\frac{1}{|q|} = \frac{-2H_0}{1 - \xi_0}$$

$$A_1 = \xi_1\chi_0 - \chi_1\xi_0$$

$$\xi_0^2 + \sum_{k=1}^3 \xi_k^2 = 1$$

$$\xi_0\chi_0 + \sum_{k=1}^3 \xi_k\chi_k = 0$$

$$\chi_0^2 + \sum_{k=1}^3 \chi_k^2 = 1$$

(ii) Für  $H = H_0 > 0$ :

$$|p|^2 = (-2H_0\mu)\left(\frac{1 + \xi_0}{1 - \xi_0}\right)$$

$$\frac{1}{|q|} = \frac{-2H_0}{1 - \xi_0}$$

$$A_1 = \xi_0 \eta_1 - \xi_1 \eta_0$$

$$\xi_0^2 - \sum_{k=1}^3 \xi_k^2 = +1$$

$$\xi_0 \eta_0 - \sum_{k=1}^3 \xi_k \eta_k = 0$$

$$\eta_0^2 - \sum_{k=1}^3 \eta_k^2 = -1$$

Bemerkung Für  $H < 0$  bilden die  $\xi$ -s eine 3-dimensionale Sphäre  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$  und für  $H > 0$  ein Hyperboloid. In beiden Fällen stehen die  $\eta$ -s tangential zu dieser Hyperfläche, und erfüllen noch eine Nebenbedingung. Die Energiefläche wird dadurch auf einen 5-dimensionalen Unterraum von  $\mathbb{R}^8$  abgebildet, der eine kanonische Wirkung der Gruppe  $SO(4)$  bzw.  $SO(3,1)$  besitzt. Die Tatsache, daß ein Tangentialraum vorliegt, könnte man ausnutzen, um die symplektische Struktur zu transportieren. Diesen Weg werden wir jedoch nicht einschlagen, weil er anscheinend rechentechnisch sehr kompliziert wird. Stattdessen werden wir die Differentialgleichungen für eine Integralkurve von  $M_1$  direkt übersetzen.

(IX.4.) Satz Sei  $c: \mathbb{R} \rightarrow M: s \mapsto (\vec{q}, \vec{p})$  eine Integralkurve von  $M_1$  und  $\xi_i, \eta_i$  wie in (IX.1.) definiert. Dann gelten:

(i) Für  $H < 0$ :

$$\xi_0' = +\xi_1 - \eta_0 \left( \frac{\eta_1}{1-\xi_0} \right) = +\xi_1 - \eta_0 \eta_0'$$

$$\xi_1' = -\xi_0 - \eta_1 \left( \frac{\eta_1}{1-\xi_0} \right) = -\xi_0 - \eta_1 \eta_0'$$

$$\xi_2' = -\eta_2 \left( \frac{\eta_1}{1-\xi_0} \right) = -\eta_2 \eta_0'$$

$$\xi_3' = -\eta_3 \left( \frac{\eta_1}{1-\xi_0} \right) = -\eta_3 \eta_0'$$

$$\eta_0' = \frac{\eta_1}{1-\xi_0} = \eta_1 + \xi_0 \left( \frac{\eta_1}{1-\xi_0} \right) = +\eta_1 + \xi_0 \eta_0'$$

$$\eta_1' = -\eta_0 + \xi_1 \left( \frac{\eta_1}{1-\xi_0} \right) = -\eta_0 + \xi_1 \eta_0'$$

$$\eta_2' = +\xi_2 \left( \frac{\eta_1}{1-\xi_0} \right) = +\xi_2 \eta_0'$$

$$\eta_3' = +\xi_3 \left( \frac{\eta_1}{1-\xi_0} \right) = +\xi_3 \eta_0'$$

(ii) Für  $H > 0$ :

$$\xi_0' = -\xi_1 - \eta_0 \left( \frac{\eta_1}{1-\xi_0} \right) = -\xi_1 + \eta_0 \eta_0'$$

$$\xi_1' = -\xi_0 - \eta_1 \left( \frac{\eta_1}{1-\xi_0} \right) = -\xi_0 + \eta_1 \eta_0'$$

$$\xi_2' = -\eta_2 \left( \frac{\eta_1}{1-\xi_0} \right) = +\eta_2 \eta_0'$$

$$\xi_3' = -\eta_3 \left( \frac{\eta_1}{1-\xi_0} \right) = +\eta_3 \eta_0'$$

$$\eta_0' = \frac{-\eta_1}{1-\xi_0} = -\eta_1 - \xi_0 \left( \frac{\eta_1}{1-\xi_0} \right) = -\eta_1 + \xi_0 \eta_0'$$

$$\eta_1' = -\eta_0 - \xi_1 \left( \frac{\eta_1}{1-\xi_0} \right) = -\eta_0 + \xi_1 \eta_0'$$

$$\eta_2' = -\xi_2 \left( \frac{\eta_1}{1-\xi_0} \right) = +\xi_2 \eta_0'$$

$$\eta_3' = -\xi_3 \left( \frac{\eta_1}{1-\xi_0} \right) = +\xi_3 \eta_0'$$

Beweis Der Beweis besteht, in jedem Falle, aus einer direkten Anwendung der Definitionen und einer längeren Rechnung.

Wie skizzieren den Beweis für  $\xi_0'$  für  $H < 0$ .

$$\xi_0' = \frac{2(\vec{p} \cdot \vec{p}')}{|\vec{p}|^2 - 2H_0\mu} - \frac{(|\vec{p}|^2 + 2H_0\mu)}{(|\vec{p}|^2 - 2H_0\mu)^2} (2\vec{p} \cdot \vec{p}') = \frac{2(\vec{p} \cdot \vec{p}')(-4H_0\mu)}{(|\vec{p}|^2 - 2H_0\mu)^2}$$

Aus (VIII.1.) folgt:

$$(\vec{p} \cdot \vec{p}') = \sqrt{\frac{\mu}{2}}(-H_0)^{-3/2} \left[ \frac{A_1}{2|\vec{q}|^3}(-\vec{q} \cdot \vec{p}) + H_0 \left( \frac{p_1}{|\vec{q}|} - \frac{q_1(\vec{q} \cdot \vec{p})}{|\vec{q}|^3} \right) \right].$$

Jetzt wenden wir (IX.2.) und (IX.3.) an, und bekommen:

$$(\vec{p} \cdot \vec{p}') = -2H_0\mu(1/(1-\xi_0)^3)(\xi_1(1-\xi_0) - \eta_0\eta_1)$$

$$\xi_0' = (1/(1-\xi_0))(\xi_1 - \xi_0\xi_1 - \eta_0\eta_1)$$

(IX.5.) Satz Sei  $c: \mathbb{R} \rightarrow M: s \mapsto (\vec{q}, \vec{p})$  eine Integralkurve von  $M_1$  und  $\xi_i, \eta_i$  wie in (IX.1.) definiert. Dann gelten:

(i) Für  $H < 0$ :

$$\xi_0 + i\xi_1 = Be^{-is} \cos(\eta_0 + \alpha)$$

$$\xi_2 = B_2 \cos(\eta_0 + \alpha_2)$$

$$\xi_3 = B_3 \cos(\eta_0 + \alpha_3)$$

$$\eta_0 + i\eta_1 = Be^{-is} \sin(\eta_0 + \alpha)$$

$$\eta_2 = B_2 \sin(\eta_0 + \alpha_2)$$

$$\eta_3 = B_3 \sin(\eta_0 + \alpha_3)$$

$$\eta_0 = (1/2) [B e^{-is} \sin(\eta_0 + \alpha) + \bar{B} e^{+is} \sin(\eta_0 + \bar{\alpha})]$$

$B, \alpha \in \mathbb{C}$  und  $B_2, B_3, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  sind die Integrationskonstanten mit:

$$(1) \quad 1 = |B|^2 \sin \alpha \sin \bar{\alpha} + B_2^2 \sin^2 \alpha_2 + B_3^2 \sin^2 \alpha_3$$

$$(2) \quad 1 = |B|^2 \cos \alpha \cos \bar{\alpha} + B_2^2 \cos^2 \alpha_2 + B_3^2 \cos^2 \alpha_3$$

$$\Rightarrow 2 = |B|^2 \cosh(2 \operatorname{Im} \alpha) + B_2^2 + B_3^2$$

$$(3) \quad 0 = |B|^4 + B_2^4 + B_3^4 + 2 |B|^2 B_2^2 \cos(2 \operatorname{Re} \alpha - 2 \alpha_2) +$$

$$+ 2 |B|^2 B_3^2 \cos(2 \operatorname{Re} \alpha - 2 \alpha_3) + 2 B_2^2 B_3^2 \cos(2 \alpha_2 - 2 \alpha_3)$$

$$A_1 = (-1/2) |B|^2 \sinh(2 \operatorname{Im} \alpha)$$

(ii) Für  $H > 0$ :

$$\xi_0 + \xi_1 = B_0 e^{-s} \cosh(\eta_0 + \alpha_0)$$

$$\xi_0 - \xi_1 = B_1 e^{+s} \cosh(\eta_0 + \alpha_1)$$

$$\xi_2 = B_2 \cosh(\eta_0 + \alpha_2)$$

$$\xi_3 = B_3 \cosh(\eta_0 + \alpha_3)$$

$$\eta_0 + \eta_1 = B_0 e^{-s} \sinh(\eta_0 + \alpha_0)$$

$$\eta_0 - \eta_1 = B_1 e^{+s} \sinh(\eta_0 + \alpha_1)$$

$$\eta_2 = B_2 \sinh(\eta_0 + \alpha_2)$$

$$\eta_3 = B_3 \sinh(\eta_0 + \alpha_3)$$

$$\eta_0 = (1/2) [B_0 e^{-s} \sinh(\eta_0 + \alpha_0) + B_1 e^{+s} \sinh(\eta_0 + \alpha_1)]$$

$B_0, B_1, B_2, B_3, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  sind die Integrationskonstanten mit:

$$(1) \quad 1 = B_0 B_1 \cosh \alpha_0 \cosh \alpha_1 - B_2^2 \cosh^2 \alpha_2 - B_3^2 \cosh^2 \alpha_3$$

$$(2) \quad -1 = B_0 B_1 \sinh \alpha_0 \sinh \alpha_1 - B_2^2 \sinh^2 \alpha_2 - B_3^2 \sinh^2 \alpha_3$$

$$\Rightarrow 2 = B_0 B_1 \cosh(\alpha_0 - \alpha_1) - B_2^2 - B_3^2$$

$$(3) \quad 0 = B_0^2 B_1^2 - B_2^4 - B_3^4 - 2B_0 B_1 B_2^2 \cosh(\alpha_0 + \alpha_1 - 2\alpha_2) + \\ - 2B_0 B_1 B_3^2 \cosh(\alpha_0 + \alpha_1 - 2\alpha_3) + B_2^2 B_3^2 \cosh(2\alpha_2 - 2\alpha_3)$$

$$A_1 = (1/2) B_0 B_1 \sinh(\alpha_0 - \alpha_1)$$

Beweis Die Formeln für  $\xi_i$ ,  $\eta_i$  sind die Lösungen der in (IX.4.) angegebenen Differentialgleichungen, und die Nebenbedingungen an den Integrationskonstanten folgen aus den Nebenbedingungen in (IX.3.). ■

Bemerkung Wegen  $\xi_0 \geq 1$  und  $\xi_0^2 - \xi_1^2 \geq 1$  ist  $\xi_0 + \xi_1 \geq 0$ . Dann folgt aus (IX.5.)(ii), daß  $B_0 \geq 0$  und  $B_1 \geq 0$  sind.

(IX.6.) Zusatz Für  $H < 0$  und  $H > 0$  besitzt die implizite Gleichung für  $\eta_0 = \eta_0(s)$  in (IX.5.) genau eine Lösung.

Beweis (i) Für  $H < 0$  lautet die Gleichung:

$\eta_0 = (1/2)[Be^{-is} \sin(\eta_0 + \alpha) + \bar{B}e^{+is} \sin(\eta_0 + \bar{\alpha})]$ . Für festes  $s$  suchen wir also den Schnittpunkt der zwei Funktionen, die links und rechts des Gleichheitszeichens stehen. Links steht die Gerade durch den Nullpunkt mit Steigung = +1, und rechts steht eine periodische, beschränkte Funktion von  $\eta_0$ . Folglich existiert zumindest ein Schnittpunkt. Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß die Steigung der Funktion auf der rechten Seite immer  $\leq 1$  ist. Wenn  $S$  diese Steigung ist, dann haben wir:

$$S = (1/2)[Be^{-is} \cos(\eta_0 + \alpha) + \bar{B}e^{+is} \cos(\eta_0 + \bar{\alpha})] \Rightarrow$$

$$|S|^2 = (1/4)[|B|^2 \cos(\eta_0 + \alpha) \cos(\eta_0 + \bar{\alpha}) + |\bar{B}|^2 \cos(\eta_0 + \bar{\alpha}) \cos(\eta_0 + \alpha) + \\ + B^2 e^{-2is} \cos^2(\eta_0 + \alpha) + \bar{B}^2 e^{+2is} \cos^2(\eta_0 + \bar{\alpha})] =$$

$$= (1/4)[2(\xi_0 + i\xi_1)(\xi_0 - i\xi_1) + (\xi_0 + i\xi_1)^2 + (\xi_0 - i\xi_1)^2] = \xi_0^2 \leq 1.$$

(ii) Für  $H > 0$  lautet die Gleichung:

$\eta_0 = (1/2)[B_0 e^{-s} \sinh(\eta_0 + \alpha_0) + B_1 e^{+s} \sinh(\eta_0 + \alpha_1)]$ . Diesmal steht rechts eine Funktion, die sich für  $\eta_0 \gg 0$  bzw.  $\eta_0 \ll 0$  wie  $e^{+\eta_0}$  bzw.  $-e^{-\eta_0}$  verhält, da  $B_0 \geq 0$  und  $B_1 \geq 0$ . Folglich existiert zumindest ein Schnittpunkt. Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß die Steigung der Funktion auf der rechten Seite immer  $\geq 1$  ist. Wenn  $S$  diese Steigung ist, dann haben wir:

$$S = (1/2)[B_0 e^{-s} \cosh(\eta_0 + \alpha_0) + B_1 e^{+s} \cosh(\eta_0 + \alpha_1)].$$

$$S^2 = (1/4) \left[ B_0^2 e^{-2s} \cosh^2(\lambda_0 + \alpha_0) + B_1^2 e^{+2s} \cosh^2(\lambda_0 + \alpha_1) + \right. \\ \left. + 2B_0 B_1 \cosh(\lambda_0 + \alpha_0) \cosh(\lambda_0 + \alpha_1) \right] =$$

$$= (1/4) \left[ (\xi_0 + \xi_1)^2 + (\xi_0 - \xi_1)^2 + 2(\xi_0 + \xi_1)(\xi_0 - \xi_1) \right] = \xi_0^2 \geq 1.$$

In beiden Fällen kann die Steigung den Wert 1 nur für isolierte Punkte annehmen, weil die Funktion analytisch ist. ■

(IX.7.) Definition Für  $H < 0$ :

$$\psi := \frac{\sqrt{-2H\vec{q} \cdot \vec{p}}}{\sqrt{\mu}}$$

$$x_0 := \left( \frac{|\vec{q}| \cdot |\vec{p}|^2}{\mu} - 1 \right) \cos \psi + \left( \sqrt{\frac{-2H}{\mu}} \vec{q} \cdot \vec{p} \right) \sin \psi$$

$$x_k := \left( \sqrt{\frac{-2H}{\mu}} |\vec{q}| p_k \right) \cos \psi + \left( \frac{q_k}{|\vec{q}|} - \frac{(\vec{q} \cdot \vec{p}) p_k}{\mu} \right) \sin \psi$$

$$y_0 := (\vec{q} \cdot \vec{p}) \cos \psi - \sqrt{\frac{\mu}{-2H}} \left( \frac{|\vec{q}| \cdot |\vec{p}|^2}{\mu} - 1 \right) \sin \psi$$

$$y_k := \sqrt{\frac{\mu}{-2H}} \left( \frac{q_k}{|\vec{q}|} - \frac{(\vec{q} \cdot \vec{p}) p_k}{\mu} \right) \cos \psi - (|\vec{q}| p_k) \sin \psi.$$

(IX.8.) Folgerung

$$\sum_{i=0}^3 x_i^2 = 1, \quad \sum_{i=0}^3 x_i y_i = 0, \quad \sum_{i=0}^3 y_i^2 = \frac{\mu}{-2H}.$$

Beweis Es ist eine triviale Berechnung. ■

(IX.9.) Satz Es gelten:

(i) Entlang einer Integralkurve von  $M_1$ :

$$x_0' = -x_1, \quad y_0' = -y_1,$$

$$x_1' = +x_0, \quad y_1' = +y_0,$$

$$x_2' = 0, \quad y_2' = 0,$$

$$x_3' = 0, \quad y_3' = 0,$$

(ii) Entlang einer Integralkurve von  $L_1$ :

$$x_0' = 0, \quad y_0' = 0,$$

$$x_1' = 0, \quad y_1' = 0,$$

$$x_2' = -x_3, \quad y_2' = -y_3,$$

$$x_3' = +x_2, \quad y_3' = +y_2.$$

Beweis Der Beweis ist völlig analog zu (IX.4.), und genauso lang. ■

Bemerkung Die analogen Gleichungen für  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $L_2$  und  $L_3$  bekommt man durch zyklische Vertauschung. Dieser Satz von Gleichungen ist dann sofort integrierbar, und liefert die kanonische Wirkung von  $SO(4)$ .



## X. Schlußbemerkungen

Der erste wesentliche Teil dieser Untersuchung des Kepler-Problems war das Aufsuchen der Integralkurven der Hamilton-Funktion  $H$ . Dies wurde am elegantesten mit Hilfe der "maximalen" Symmetrie des Problems durchgeführt. Wegen dieser Symmetrie ist es möglich, die Bahnen von  $H$  auf einem sehr einfachen Weg zu finden. Die Symmetrie hängt mit der Erhaltung des Drehimpulses und des Runge-Lenz Vektors zusammen, die unter der Poisson-Klammer eine Lie-Algebra bilden.

Der zweite Teil war eine nähere Untersuchung der Symmetrie. Wir suchten die Transformation, die mit der Erhaltung des Runge-Lenz Vektors zusammenhängt, d.h. wir suchten die Integralkurven von  $\vec{M}$ . Dieses Problem ließ sich nicht wie das erste lösen, aber das Ausnutzen der Symmetrieeigenschaft war wesentlich. Die Energiefläche wurde auf einen solchen Raum abgebildet, der eine besonders einfache Wirkung der gesuchten Gruppe besitzt. Diese "einfachste" oder "kanonische" Wirkung von  $SO(4)$  auf  $T_1(S^3)$  war jedoch nicht die gesuchte Wirkung von  $SO(4)$ , die als Lie-Algebra die Funktionen  $\vec{L}$  und  $\vec{M}$  hat. Die mittels dieser Transformation übertragenen Differentialgleichungen für die Integralkurven von  $\vec{M}$  waren aber doch einfach zu lösen. Eine Abweichung von der "kanonischen" Wirkung von  $SO(4)$  ist die "Frequenz"  $\mathfrak{h}_0$ , die eine transzendente Gleichung erfüllt.

Der quantenmechanische Fall (H-Atom) ist in vielen Hinsichten analog zum klassisch mechanischen Problem, und wurde diskutiert, u.a. von Bander und Itzykson [3]. Der Runge-Lenz Vektor wird als hermitischer Operator definiert und liefert mit den Vertauschungsbeziehungen eine Darstellung der gleichen Lie-Algebra wie im klassischen Fall. Durch das auf Fock zurückgehende Verfahren wird, im Impulsraum, eine stereographische Projektion durchgeführt. Die daraus resultierende Schrödinger Gleichung ist dann, für  $H < 0$ , in einer offensichtlichen Weise invariant unter  $SO(4)$ . Die Sphäre  $S^3$ , die in der stereographischen Projektion als Bildraum vorkommt, besitzt eine kanonische Wirkung der Gruppe  $SO(4)$  (Rotation der Sphäre) die dann eine unitäre Darstellung der Gruppe  $SO(4)$  erzeugt. Es wird noch gezeigt, daß die selbstadjungierten Operatoren, die als infinitesimale Erzeugenden dieser Darstellung dienen, genau die Dreh-Impuls- und Runge-Lenz-

Vektor-Operatoren sind. Die Existenz einer solchen Darstellung der Gruppe hängt eng mit der Existenz einer globalen Wirkung der Gruppe im klassischen Fall zusammen (siehe Kostant [9;(2.10.1)]). Das ist eine Anwendung der "Kostantifikation", ein Funktor von der Kategorie der Hamiltonschen Systeme mit Poisson-Klammer Lie-Algebra in die Kategorie der Hilberträume und linearen Operatoren mit Vertauschungs-Beziehung Lie-Algebra.

Literatur:

- 1 ABRAHAM, R. and J. MARSDEN: Foundations of Mechanics; Benjamin, New York (1967)
- 2 BACRY, H.: The de Sitter Group  $L_{4,1}$  and the Bound States of Hydrogen Atom; Nuovo Cim., 41A, 222 (1966)
- 3 BANDER, M. and ITZYKSON, C.: Group Theory and the Hydrogen Atom; Rev. Mod. Phys. 38, 330-345 und 346-358 (1966)
- 4 DIEUDONNE, J.: Eléments d'Analyse; Gauthier-Villars, Paris (1971)
- 5 DIRAC, P.A.M.: Quantum Mechanics; Clarendon Press, Oxford (1947)
- 6 GYÖRGYI, G.: Kepler's Equation, Fock Variables, Bacry's Generators; Nuovo Cimento, 53A, 717 (1968) und 62A, 449 (1969)
- 7 JOST, R.: Poisson Brackets (An Unpedagogical Lecture); Rev. Mod. Phys., 36, 572-579 (1964)
- 8 KAMKE, E.: Differentialgleichungen Reeller Funktionen, 3. Auflage; Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig (1956)
- 9 KOSTANT: Quantization and Unitary Representations, in Lecture Notes in Mathematics Vol. 170; Springer, Berlin (1970)
- 10 MOSER, J.: Regularization of Kepler's Problem and the Averaging Method on a Mannifold; Comm. Pure and Appl. Math., 23, 609 (1970)
- 11 PAULI, W.: Nuovo Cim., 10, 648-667 (1953)
- 12 ROTTMANN, K.: Mathematische Formelsammlung, 2. Auflage; Bibliographisches Institut, Mannheim (1960)
- 13 RYSHIK, I.M. und I.S. GRADSTEIN: Summen- Produkt- und Integraltafeln; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1957)
- 14 SEGAL, I.E.: J. Math. Phys., 1, 468-488 (1960)